université de BORDEAUX

Thèse présentée
pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Bordeaux

École Doctorale de Mathématiques et d'Informatique
Spécialité Informatique
par Jérôme Charton

Étude des caractéristiques saillantes sur des maillages 3D par estimation des normales et des courbures discrètes.

Sous la direction de : Pascal Desbarats
Co-encadrante : Stefka Gueorguieva

Soutenue le 16/12/2014

Membres du jury :

Alain Bernard	Professeur des Universités IRCCyN - École Centrale de Nantes	Examinateur
Pascal Desbarats	Professeur des Universités LaBRI - Université de Bordeaux	Directeur
Jean-Philippe Domenger	Professeur des Universités LaBRI - Université de Bordeaux	Examinateur
Stefka Gueorguieva	Maître de Conférences LaBRI - Université de Bordeaux	Co-encadrante
Christophe Renaud	Professeur des Universités LISIC - Université du Littoral Côte d'Opale	Rapporteur
Mateu Sbert	Professeur IIIA - Université de Girona	Rapporteur

Titre Étude des caractéristiques saillantes sur des maillages 3D par estimation des normales et des courbures discrètes.

Résumé Dans l'objectif d'améliorer et d'automatiser la chaîne de reproduction d'objet qui va de l'acquisition à l'impression 3D. Nous avons cherché à caractériser de la saillance sur les objets 3D modélisés par la structure d'un maillage 3D. Pour cela, nous avons fait un état de l'art des méthodes d'estimation des propriétés différentielles, à savoir la normale et la courbure, sur des surfaces discrètes sous la forme de maillage 3D. Pour comparer le comportement des différentes méthodes, nous avons repris un ensemble de critères de comparaison classique dans le domaine, qui sont : la précision, la convergence et la robustesse par rapport aux variations du voisinage. Pour cela, nous avons établi un protocole de tests mettant en avant ces qualités. De cette première comparaison, il est ressorti que l'ensemble des méthodes existantes présentent des défauts selon ces différents critères. Afin d'avoir une estimation des propriétés différentielles plus fiable et précise nous avons élaboré deux nouveaux estimateurs.

Mots-clés Propriétés différentielles, Courbure, Normale, Saillant, Maillage 3D

Title Study of salient features on 3D meshes through discrete normal and curvature estimation.

Abstract With the aim to improve and automate the object reproduction chain from acquisition to 3D printing. We sought to characterize the salience on 3D objects modeled by a 3D mesh structure. For this, we have a state of the art of estimating differential properties methods, namely normal and curvature on discrete surfaces in the form of 3D mesh. To compare the behavior of different methods, we took a set of classic benchmarks in the domain, which are : accuracy, convergence and robustness with respect to variations of the neighbourhood. For this, we have established a test protocol emphasizing these qualities. From this first comparison, it was found that all the existing methods have shortcomings as these criteria. In order to have an estimation of the differential properties more reliable and accurate we developed two new estimators.

Keywords Differential properties, Curvature, Normal, Salient, 3D mesh

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique - UMR 5800

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Pascal Desbarats, pour avoir su échanger, pour m'avoir guidé et soutenu durant cette thèse.

Je remercie ma co-encadrante de thèse, Stefka Gueorguiva, qui m'a aidé et encouragé tout au long de ces années de recherche.

Je tiens à remercier mes rapporteurs Christophe Renauld et Mateu Sbert pour avoir porté de l'intérêt à ces travaux et pour leurs remarques qui ont permis d'amender ce manuscrit. Je les remercie, tout comme Alain Bernard et Jean-Philippe Domenger, de s'être rendu disponible à ma soutenance et pour leurs commentaires qui m'ont donné un point de vue plus large sur ces travaux et des idées de projets pour la suite de mes activités.

Un grand merci à Boris Mansencal pour m'avoir aidé quant au développement de la platforme expérimentale *SmithDR*. Il a su me prêter main forte pour résoudre certaines configurations complexes.

J'adresse mes forts remerciements à l'ensemble des membres du laboratoire que j'ai pu côtoyer : permanents, non-permanents, personnel administratif. En cela, je remercie personnellement Cathy Roubineau, Marie Beurton-Aimar, David Auber, Cyril Gavoille et Pierre Hanna. Ainsi que mes collègues de bureau, Florent Berthaut, Simon Naulin, Razanne Issa, Raphaël Marczak, Luc Vercellin, Noémie-Fleur Sandillon-Rezer et Ludovic Paulhac. Je remercie particulièrement Allyx Fontaine pour avoir été là jusqu'au bout pour m'aider et m'encourager.

Enfin je souhaite remercier Merlin et Hermine C. pour leur soutien personnel au travers de ces années.

Table des matières

Introduction **1**

Notations **3**

1 Introduction au domaine **5**
1.1 Maillage 3D 5
1.1.1 Définitions 5
1.1.2 Obtention d'un maillage 8
1.2 Points/Formes saillant(e)s 13
1.3 Propriétés différentielles d'une surface 15
1.3.1 Modèle continu 16
1.3.2 Modèle discret (Maillage 3D) 23
1.4 Critères d'analyse 24
1.4.1 Stabilité 24
1.4.2 Précision 24
1.4.3 Convergence 24

2 Estimation de la courbure **27**
2.1 Méthodes existantes 27
2.1.1 *DCO* (opérateur de courbure discret) 28
2.1.2 *SQFA* (régression sur Quadrique Simple) 29
2.1.3 Tenseur de courbure : *Taubin* & *Langer* 31
2.1.4 *ChenSchmitt* 33
2.2 Éléments de comparaison 36
2.3 La méthode proposée : *SineFitting* [CGD13] (régression sur sinusoïde) 39
2.3.1 Évaluation des courbures normales 40
2.3.2 Transformation de l'équation d'Euler 40
2.4 Discussion de la méthode 41

3 Normale **45**
3.1 Méthodes existantes 46
3.1.1 *AreaWeighted* (pondération par les aires des faces adjacentes) 47
3.1.2 *PlaneFitting* (régression sur un plan) 48
3.1.3 *ExtendedQuadricFitting* (régression sur quadrique étendue) . . 49

3.1.4 *ChenSchmitt* . . . 51
3.2 Éléments de comparaison . . . 52
3.3 La méthode proposée : *ExtendedSineFitting* (régression sur sinusoïde étendue) . . . 53
3.3.1 Principe de fonctionnement . . . 53
3.3.2 Description de l'algorithme de l'*ExtendedSineFitting* . . . 63
3.4 Discussion de la méthode . . . 71

4 Expérimentations **73**
4.1 Principe expérimental . . . 73
4.1.1 Le test de Garimella et Swartz [GS03] . . . 73
4.1.2 Le test de Gatzke et Grimm [GG06] . . . 75
4.2 Protocole expérimental . . . 77
4.2.1 Convergence ponctuelle . . . 77
4.2.2 Convergence globale . . . 81
4.3 Résultats . . . 83
4.3.1 Expérimentations sur la courbure . . . 83
4.3.2 Expérimentations sur la normale . . . 102

5 Applications **117**
5.1 Correction maxillofaciale . . . 117
5.1.1 Technique originale . . . 118
5.1.2 Nos objectifs et notre démarche . . . 121
5.1.3 Apports de la thèse pour cette application . . . 124
5.1.4 Conclusion . . . 124
5.2 Reconstitution faciale . . . 130
5.2.1 Principe de la méthode . . . 130
5.2.2 Apports de la thèse pour cette application . . . 132
5.2.3 Conclusion . . . 132
5.3 Conclusion . . . 136

Conclusion **137**

Publications **139**

Preuves **141**

Introduction

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans un projet financé par le Conseil Région d'Aquitaine. Le cadre général est l'étude de la chaîne complète de reproduction d'objet, de l'acquisition à l'aide d'un scanner laser au prototypage rapide par une impression d'objets 3D.

Il s'avère que toutes les étapes de cette chaîne sont étroitement liées à la capacité de définir et de manipuler les caractéristiques de la forme des objets.

Par exemple, lors du recollement des vues d'un scanner laser, une reconnaissance des caractéristiques de formes partagées par plusieurs vues permet de supprimer les zones de recouvrement de manière fiable. De même, sur les os crâniens pour des applications anthropologiques, les caractéristiques de la forme des objets, points et formes saillantes, sont traduites par des points craniométriques situés sur les bords des surfaces ostéologiques avec des inversions de courbure bien définies.

Ces points correspondent à des propriétés différentielles, comme par exemple les propriétés de courbures moyenne ou gaussienne extrémales. Ces points caractéristiques sont des propriétés de saillance.

Dans le cadre de notre étude, nous orientons nos applications sur des données acquises et reconstruites sous la forme de maillages 3D. Ces données ont la particularité d'avoir des structures irrégulières et dépendantes de la méthode d'acquisition et de la méthode de reconstruction. Après caractérisation de ces irrégularités dans des tests de convergence, de précision et de stabilité, ces derniers montrent que l'ensemble des estimateurs de référence sont très sensibles aux perturbations du maillage.

Les contributions principales de cette thèse sont un nouvel estimateur de courbure appelé *SineFitting* et un nouvel estimateur de normale appelé *ExtendedSineFitting*. Tous deux s'appliquent sur des maillages 3D et ont pour but d'être plus stables et plus précis que l'existant.

Cette stabilité et cette précision apporteraient une meilleure fiabilité quant à la détection de points et de formes saillantes et de ce fait aux applications qui en découlent.

Ce rapport est composé de 5 chapitres. Le chapitre introductif présente le contexte et la problématique de nos travaux. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux estimateurs de courbure et de normale. Chacun contient un état de l'art concis, une comparaison des méthodes de référence et la présentation de l'estimateur proposé. Le chapitre 4 présente la base expérimentale de comparaison des estimateurs en fonction de trois critères qui sont la précision, la stabilité et la convergence et en

donne les résultats détaillés. Finalement, le chapitre 5 présente deux applications des travaux de cette thèse :

- la première est une application dans le domaine médical et tout particulièrement dans le domaine de la chirurgie maxillofaciale, pour laquelle nous avons travaillé sur la virtualisation de la phase préparatoire avec conception et impression des guides occlusaux utilisés pendant l'opération,
- la seconde est une application dans le domaine anthropologique et a pour but de faire de la reconstitution faciale 3D, *i.e.* la reconstitution globale de la morphologie du visage autrement dit de ses basses fréquences par la saisie de points craniométriques.

Notations

Pour simplifier et harmoniser les écritures par la suite, nous introduisons la liste de notations :

- Le vecteur unitaire : $\widehat{v}$.
- La norme euclidienne : $\|\vec{v}\|$ ou $\|\vec{v}\|_2$.
- Le produit vectoriel : $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$.
- Le produit scalaire : $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$.
- Un angle : $\angle(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.
- Un angle orienté : $\measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.
- La valeur absolue : $|a|$.
- La fonction signe : $\text{sgn}(a) = \frac{a}{|a|}$.
- La normalisation d'un vecteur : soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque dans $\mathbb{R}^n$ / $\vec{v}_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
- La cardinalité d'un ensemble E : $card(E)$ ou $|E|$.
- Le symbole P est réservé au sommet analysé.
- Le symbole $\vec{N}$ est réservé aux normales de surfaces.
- Le symbole τ est réservé aux plans tangents de surfaces.
- Le symbole $\vec{t}$ est réservé aux vecteurs tangents.
- Le symbole $\vec{n}$ est réservé aux normales de courbes.
- L'ensemble $\{P_i\}$ (écriture simplifiée de $\{P_i\}_{i\in\{0,1,\cdots,m-1\}}$) désigne les m voisins du sommet P.
- Le symbole m sera réservé au nombre de voisins du sommet analysé : $m = |\{P_i\}|$.
- L'ensemble $\{P_i^+\}$ désigne l'ensemble contenant les voisins du sommet P et P lui même. $\{P_i^+\} = \{P_i\} \cup \{P\}$.

Note :

Dans la suite de ce document, l'échelle de couleur utilisée est *HotMetal*[1].

1. L'échelle de couleur *HotMetal* correspond à la variation de la couleur d'un métal à différentes températures. On a donc des couleurs allant du bleu pour les valeurs les plus basses au rouge pour les valeurs les plus hautes en passant par le vert pour les valeurs médianes.

Chapitre 1

Introduction au domaine

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons aux caractéristiques de saillance sur les maillages 3D, qu'ils soient issus d'une acquisition ou d'une discrétisation d'une surface analytique.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord donner les définitions relatives à un maillage, puis nous allons expliquer comment un maillage 3D peut être obtenu. Dans un deuxième temps, nous définirons la notion de saillance sur un maillage 3D. Enfin nous présenterons les fondements mathématiques des propriétés différentielles des surfaces ainsi que les critères d'analyse qui nous serviront de base de comparaison entre les différentes méthodes étudiées.

1.1 Maillage 3D

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 (Maillage 3D) *Un maillage 3D est un objet défini dans un espace euclidien continu de dimension 3 par un ensemble V de sommets à coordonnées 3D, un ensemble E d'arêtes qui définissent les connexités entre les sommets et un ensemble F de faces (ou facettes) qui représentent des éléments de surface.*

Dans la suite du texte nous ne traiterons que des maillages à faces triangulaires.

L'ensemble V de points du maillage est un échantillonnage de la surface. Cet échantillonnage peut avoir différentes propriétés comme être plus ou moins dense ou régulier. Ces propriétés introduisent les notions d'échelle et de régularité de maillage.

Définition 1.2 (Échelle d'un maillage) *L'échelle d'un maillage correspond à la longueur moyenne des arêtes du maillage.*

La surface elle-même est modélisée par les faces et arêtes qui lient les sommets entre eux. De ce fait, chaque sommet du maillage possède un voisinage dans celui-ci.

Définition 1.3 (Le voisinage d'un point) *Le voisinage d'un point P est un ensemble de points défini par une relation de proximité.*

Remarque 1.1 *Les relations de proximité communément utilisées sont définies sur une relation de distance. Cette relation de distance peut être :*

- *la distance en nombre minimal d'arêtes : elle est la distance la plus utilisée car elle permet d'avoir une distance relative à la discrétisation du voisinage. Elle présente également un cas particulier qui est celui de distance 1, appelé le premier cercle ou parapluie (en anglais 1-ring ou umbrella) (cf. Figure 1.1). La particularité de ce premier cercle est qu'il est une triangularisation au plus proche voisinage du sommet observé.*
- *la distance euclidienne : elle consiste à prendre comme voisins tous les sommets de distance inférieure ou de distance proche à une distance euclidienne donnée.*

Définition 1.4 (Valence d'un sommet dans un maillage) *La valence d'un sommet dans un maillage est égale au nombre de sommets appartenant à son premier cercle de voisinage.*

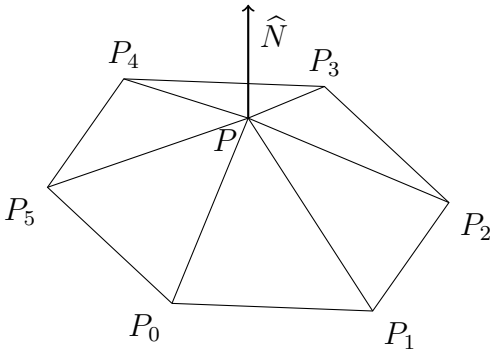


FIGURE 1.1 – Exemple d'un premier cercle de voisinage d'un point P dans un maillage.

Contrairement à une surface analytique qui est l'image d'une fonction connue, un maillage reconstruit est l'image discrète d'une fonction inconnue. Aussi, retrouver les informations différentielles locales à un sommet d'un maillage revient à estimer la surface par interpolation d'une fonction continue sur un voisinage donné. Ces valeurs estimées sont alors dépendantes de la méthode d'interpolation, de la fonction continue recherchée et de la répartition spatiale du voisinage.

Définition 1.5 (Répartition spatiale) *Soient $\{P_i\}$ un ensemble de points d'une surface S tel que $|\{P_i\}| = n$, $P \notin \{P_i\}$ un point de S, τ le plan tangent à S en P et $\{P_i^*\}$ l'ensemble des projections orthogonales des éléments de $\{P_i\}$ sur τ (cf. Figure 1.2).*

Supposons, sans perte de généralité, que $\{P_i^*\}$ soit un ensemble ordonné dans le sens trigonométrique direct autour de P avec comme direction d'origine $\overrightarrow{PP_0^*}$.

La répartition spatiale des éléments de $\{P_i\}$ par rapport à P est la variance en terme de distance et d'angle relatifs entre eux.

Elle est dite régulière si :

– $Variance(\|\overrightarrow{PP_i}\|)$ *proche de* 0 *et*
– $Variance(\angle(\overrightarrow{PP_i^*}, \overrightarrow{PP^*_{(i+1) \ mod \ n}}))$ *proche de* 0.
Elle est dite équilibrée si :
– $\forall P_a^* \in \{P_i^*\} \exists P_b^* \in \{P_i^*\} | \overrightarrow{PP_a^*} = -\overrightarrow{PP_b^*}$.

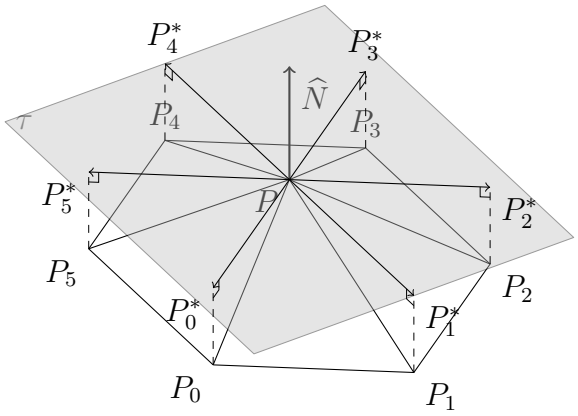


FIGURE 1.2 – Ensemble $\{P_i^*\}$ défini par projection orthogonale des $\{P_i\}$ sur le plan tangent τ.

La répartition spatiale des sommets adjacents à un sommet impacte sur la géométrie des triangles voisins. Une bonne répartition sur le voisinage du premier cercle de l'ensemble du maillage conduit à des triangles équilatéraux. Aussi l'*aspect ratio*, noté AR, des triangles du maillage est un critère de qualité.

Définition 1.6 (*Aspect ratio* d'un triangle) *L'AR est un coefficient d'éloignement par rapport au cas idéal du triangle équilatéral. Il est calculé en divisant la longueur du coté le plus petit de la face par celle du coté le plus long. On obtient alors un AR compris dans l'intervalle* $]0;1]$. *Quand l'AR tend vers la valeur minimale cela signifie que le triangle est très étiré et quand la valeur tend vers la valeur maximale alors le triangle tend vers un triangle équilatéral ce qui correspond à un échantillonnage régulier, un cas idéal.*

Au final, un maillage est une représentation discrète d'une surface. Mais la fonction mathématique sous-jacente à celle-ci est inconnue et de ce fait les propriétés différentielles également. Pour cela, il existe des estimateurs de celles-ci.

Définition 1.7 (Estimateur de propriétés différentielles sur un maillage) *Un estimateur de propriétés différentielles sur un maillage est une fonction qui permet d'estimer, en un sommet* P *donné du maillage, des propriétés différentielles locales à* P. *Il prend en entrée* P *et un ensemble de sommets* $\{P_i\}$ *formant le voisinage de* P.

Soit D l'ensemble, dont les éléments sont distincts, des propriétés différentielles retournées par l'estimateur Estim.

Un estimateur peut s'écrire sous la forme :

$$Estim(P, \{P_i\}) = d, d \in D. \tag{1.1}$$

Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment un maillage peut être obtenu et donnerons les définitions des propriétés différentielles que nous souhaitons estimer.

1.1.2 Obtention d'un maillage

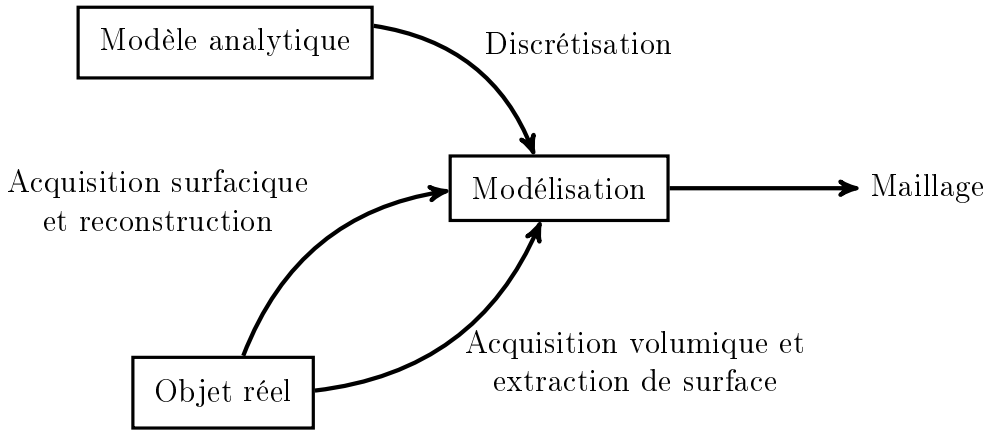


FIGURE 1.3 – Schéma des séquences possibles pour obtenir un maillage.

Un maillage peut être soit synthétisé, soit reconstruit à partir d'une acquisition. Les modèles synthétisés sont des constructions issues de la discrétisation d'un modèle analytique simple ou complexe, alors que les modèles issus d'acquisition sont soit des acquisitions de surface directe comme l'acquisition par scanner laser, soit des extractions de surface depuis des données volumiques (cf. Figure 1.3). Nous allons par la suite détailler ces trois méthodes.

Discrétisation de modèle analytique

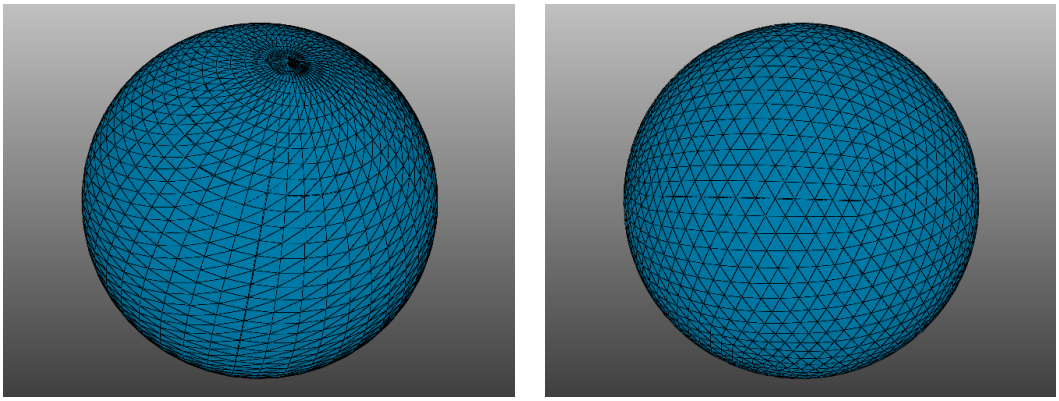
Le modèle discret synthétique est la discrétisation du modèle analytique, autrement dit c'est l'image discrète d'une fonction analytique simple ou composée. La discrétisation est obtenue par échantillonnage d'un ensemble de points de l'image de la fonction dans un premier temps. Puis sur cet ensemble de points, des facettes polygonales sont créées comme approximation de la surface entre ces points pour constituer un maillage 3D. De part le fait que la surface analytique peut être échantillonnée par une infinité de combinaisons de points, une surface analytique peut donner lieu à une infinité de maillages différents et sur une même surface, on peut

construire différentes organisations du maillage. Considérons un exemple simple. Une sphère de centre (x_c, y_c, z_c) et de rayon r répond à l'équation cartésienne suivante :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2. \tag{1.2}$$

Elle peut être discrétisée sous forme de subdivisions récursives d'un icosaèdre [1] pour obtenir une *ICO-Sphère* (cf. Figure 1.5(b)) ou par subdivision de la sphère en méridiens et parallèles à l'image du globe terrestre. Les intersections entre les lignes construites définissent les points échantillonnés. Cette discrétisation est appelée *UV-Sphère* (cf. Figure 1.5(a)). Ces deux discrétisations représentent la même surface analytique mais ont des propriétés très différentes. Par exemple, toutes les facettes de l'*ICO-Sphère* sont équilatérales alors que celle de l'*UV-Sphère* s'étirent depuis l'équateur jusqu'au pôle. Comme vu plus haut, l'*aspect ratio* est un critère de qualité de maillage qui met en exergue l'étirement ou non des triangles du maillage.

La Figure 1.5 donne un rendu en couleurs de cet AR sur l'*ICO-Sphère* et l'*UV-Sphère*. On remarque que l'une ne contient que des triangles équilatéraux alors que l'autre a des triangles dont l'AR varie suivant la distance par rapport au pôle. De plus, tous les sommets de l'*ICO-Sphère* ont une valence de 6 alors que l'*UV-Sphère* possède deux sommets en ses pôles de valence égale au nombre de méridiens de celle-ci.



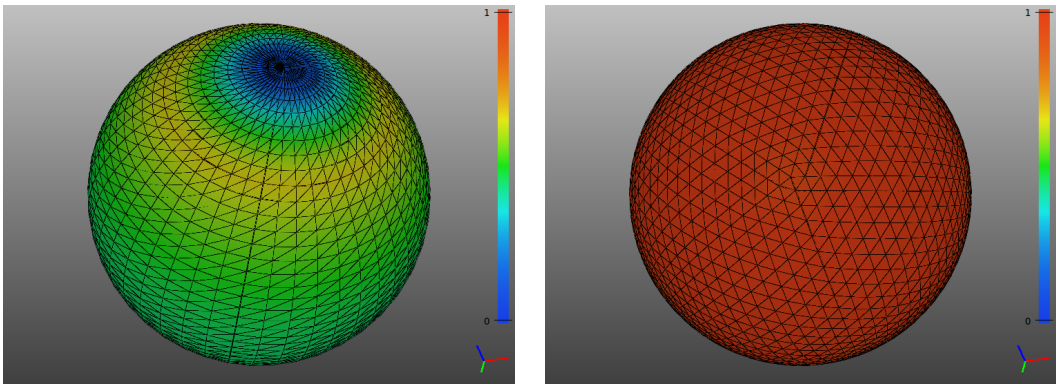
(a) *UV-Sphère* (b) *ICO-Sphère*

Figure 1.4 – Exemples de discrétisation d'une sphère sous forme d'une *UV-Sphère* et d'une *ICO-Sphère*.

Acquisition surfacique

Il existe de nombreuses techniques pour acquérir la surface d'un objet, comme par exemple la reconstruction à partir de photos simples [BKL09], multi-points de

1. Un icosaèdre est un polyèdre régulier à 20 faces triangulaires.



(a) *AR* sur une *UV-Sphère* (b) *AR* sur une *ICO-Sphère*

FIGURE 1.5 – *Aspect ratio* des facettes d'une *UV-Sphère* et d'une *ICO-Sphère* avec mise en couleur de l'*AR* sur une échelle de couleur en *HotMetal* sur l'intervalle [0 ; 1] (1 étant la valeur idéale, elle correspond à la couleur rouge).

vues [DP14] ou stéréoscopiques [JP11] ou encore à partir de la projection et de la lecture de motifs réguliers [SOY+09, FSK+10, KOFN06]. L'acquisition d'une surface est composée de trois phases :

- La première phase est l'acquisition d'un nuage de points. Elle consiste à projeter une ligne ou une grille sur la surface d'un objet et par le biais d'une caméra en angle. Puis le scanner lit la distance d'un ensemble de points pris sur la ligne/grille projetée sur la surface par rapport à la source de la projection laser. Cet ensemble de points correspond alors à une ou des section(s) discrétisée(s) de la surface de l'objet. Ensuite, par déplacement de la tête par un bras de contrôle de la position 3D (cf. Figure 1.6) ou par rotation de l'objet lui-même sur un plateau (cf. Figure 1.7), le point d'observation change pour obtenir d'autres ensembles de points. La fusion de toutes ces prises de vue à différents points d'observation donne ce que l'on appelle un nuage de points (cf. Figure 1.8). Mais comme l'objet est posé pour en faire l'acquisition, une partie est cachée au scanner. On procède alors à une ou plusieurs autres acquisitions de nuages de points de la surface de l'objet dans différentes positions.
- La seconde phase est la mise en correspondance des acquisitions. Après la première étape, on obtient plusieurs nuages de points qui correspondent à différentes parties complémentaires de la surface mais avec de larges parties communes. Ces parties communes sont nécessaires pour faire le réalignement. Comme on peut le voir sur l'exemple de la Figure 1.9, sur l'image du haut, les objets sous-jacents aux nuages de points issus de l'acquisition sont dans des repères quelconques. Pour pallier cela, on fait un premier alignement en désignant un minimum de trois points (il faut trois points pour décrire un élément de base en 3D) de correspondance entre les différents nuages de points.

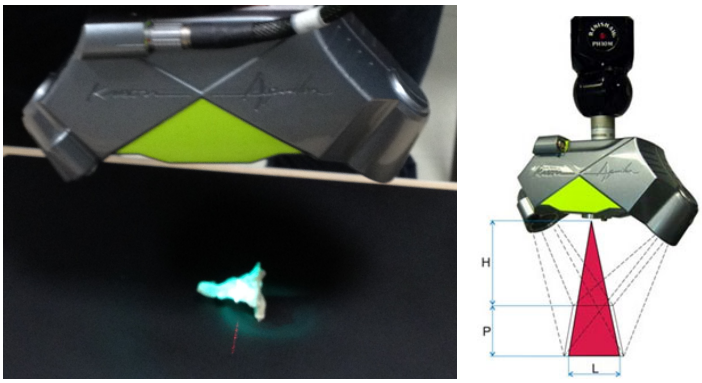


Figure 1.6 – Aquilon[2] : Scanner mobile d'acquisition de surface de Kréon (image de droite issue du site http ://www.tesis.com.ru/equip/kreon/aquilon.php).



Figure 1.7 – Digitalizer[3] : Plateau d'acquisition de surface de MakerBot®.

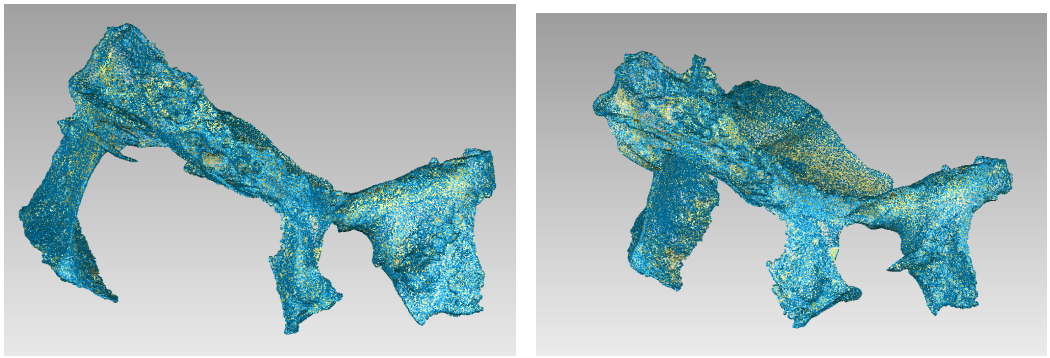


Figure 1.8 – Exemple d'un nuage de points issu d'une acquisition faite avec l'Aquilon.

Ceci permet de faire un premier alignement grossier. Enfin, pour faire correspondre les différentes acquisitions, on lance sur ces derniers un algorithme de type *ICP* (*Iterative Closest Point* : rapprochement itératif de points) [SLW02, SDG07] qui minimise la distance globale entre les nuages de points

2. http ://www.kreon3d.com/aquilon/
3. https ://store.makerbot.com/digitizer

(cf. Figure 1.10). Une fois l'ensemble des acquisitions réalignées, nous n'avons

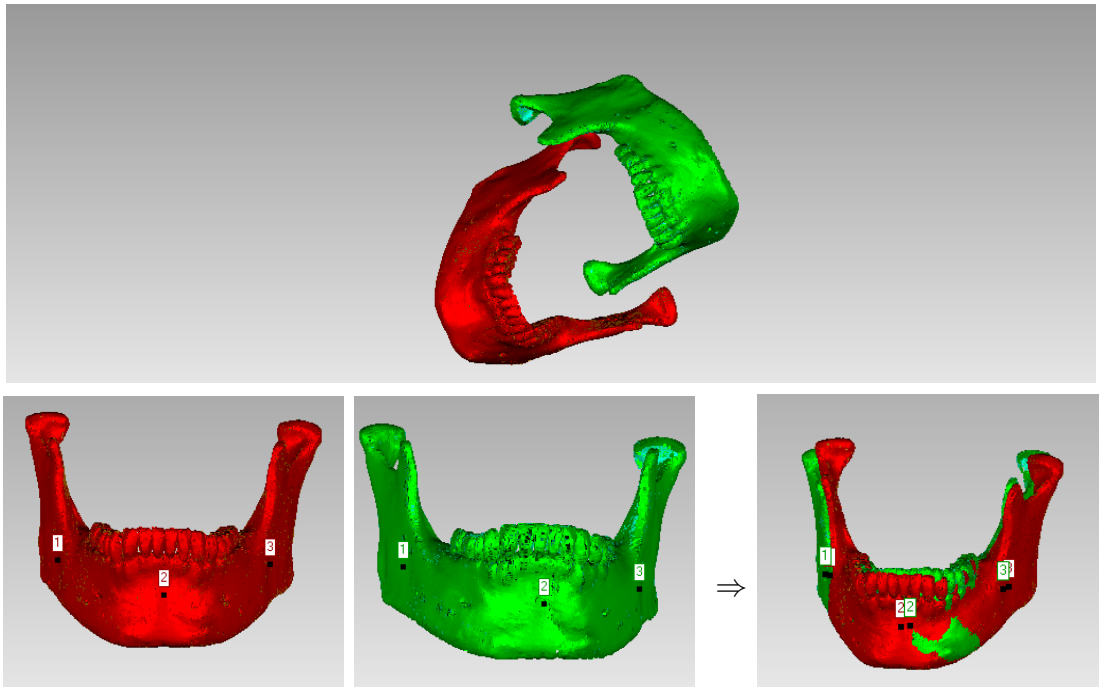
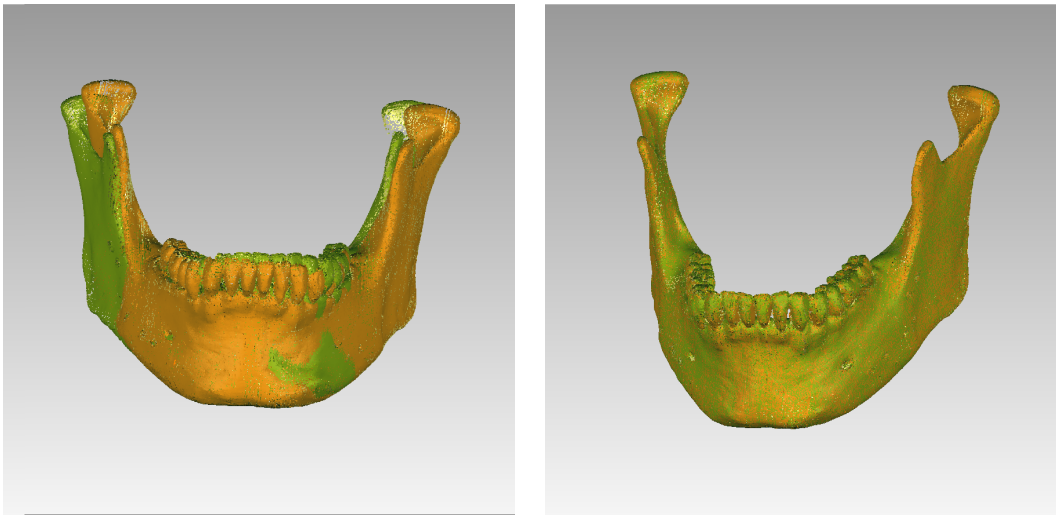


FIGURE 1.9 – Réalignement grossier de données acquises.



(a) Avant (b) Après

FIGURE 1.10 – Réalignement fin par *ICP* (*Iterative Closest Point*) [SLW02, SDG07].

toujours qu'un nuage de points de la surface de l'objet. Il reste alors à reconstruire ce maillage.

– La troisième phase est la reconstruction de la surface à partir du nuage de points. Pour reconstruire la surface de l'objet elle-même, on lance un algorithme de reconstruction qui a pour but de lier ces points entre eux par des approximations discrètes de la surface, autrement dit des facettes. Ainsi toutes les facettes juxtaposées forment une représentation discrète de la surface de l'objet. Il existe de nombreux algorithmes de reconstruction comme *BPA* [BMR+99], *Delaunay* [NMdOT01, DGH01], *Voronoï* [ACSTD07, ABK98], *Poisson* [KBH06] ou *Power Crust* [ACK01]. Ces différents algorithmes se différencient par leurs approches et/ou par leurs contraintes de construction. Par exemple l'algorithme *BPA* voit l'ensemble de l'objet comme une surface alors que l'algorithme *Poisson* voit l'objet comme une région fermée et cherche à définir un intérieur et un extérieur à celui-ci.

Parmi ces trois phases, la partie qui reste manuelle est le recalage grossier, et plus exactement le placement des points de mise en correspondance des différentes acquisitions.

Extraction de surface depuis une acquisition volumique

Une autre manière d'obtenir une surface est d'extraire une iso-surface ou la surface d'un objet segmenté à partir d'une acquisition volumique. Cette acquisition peut être obtenue entre autre par CT-Scan, micro-CT-scan, IRM ou encore imagerie terahertz. Une image volumique est une grille régulière d'éléments volumiques 3D valués, appelés *voxels (volume elements)*. Pour visualiser un tel volume de données, on procède à une visualisation coupe par coupe dans un ou trois plan(s) parallèle(s) aux axes (cf. Figure 1.11).

On peut extraire un maillage de la surface d'un objet contenu dans une image volumique en utilisant un algorithme de type *marching cube* [LC87, Che95, GD05] dont le principe de base est de classifier l'ensemble des voxels en deux catégories : les intérieurs et les extérieurs. Une fois cette distinction faite, il reconstruit un maillage correspondant à la séparation entre ces deux classes.

Par exemple, la Figure 1.12 représente l'extraction de la surface de la matière blanche du cerveau issue des mêmes données volumiques que celles représentées à la Figure 1.11 par la méthode *Neighbourhood based marching cubes* [GD05].

1.2 Points/Formes saillant(e)s

Un élément d'un objet est dit saillant s'il est remarquable. Autrement dit s'il a des propriétés qui font de lui un élément distinguable des autres éléments de l'objet. Sur un maillage, on peut distinguer deux formes de saillance :

– La première forme de saillance que l'on peut observer est la distinction de certains points de la surface par rapport aux autres. Pour illustrer cette forme de saillance, la Figure 1.13 présente un objet composé de facettes et d'arêtes. Sur cet objet, on observe facilement que les coins, les crêtes et les crevasses

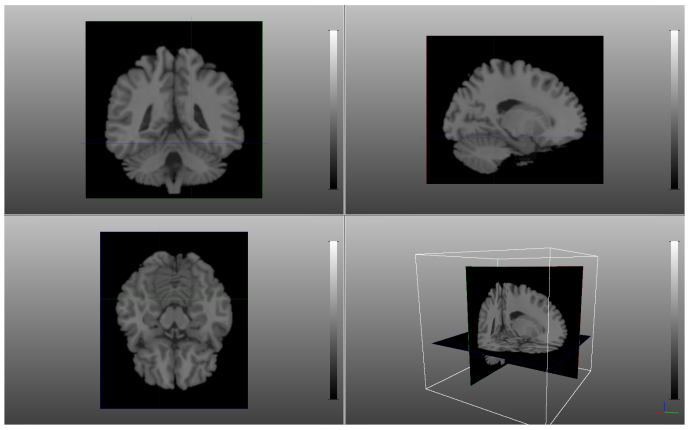


FIGURE 1.11 – Exemple d'image 3D d'un cerveau (source : exemple de présentation itk-SNAP [4]).

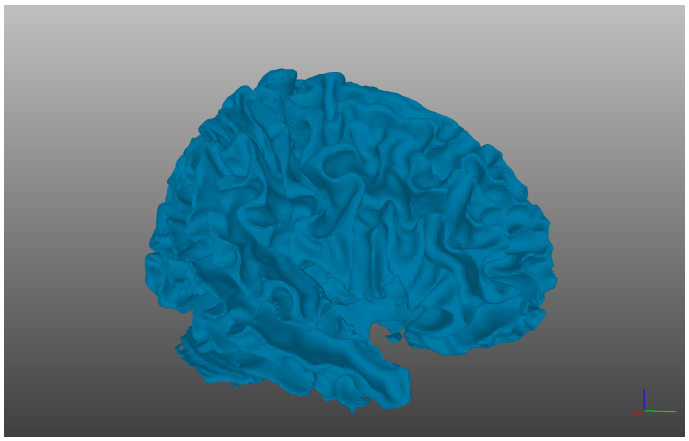


FIGURE 1.12 – Surface extraite de la segmentation de la matière blanche sur l'image 3D de la Figure 1.11 par la méthode *Neighbourhood based marching cubes* [GD05].

constituent les éléments de saillance de ce modèle. La mise en exergue de ces points caractéristiques, comme on peut le voir sur la Figure 1.14, revient à extraire les points de plus forte amplitude de courbure moyenne de la surface.

– La seconde forme de saillance est l'ensemble des formes saillantes. On appelle forme saillante, une forme partielle distinguable dans l'ensemble de la surface. Pour illustrer cela, prenons la Figure 1.15. Le modèle de cette Figure est descriptible comme étant la composition d'une demi-sphère, d'un demi-tore, d'un cylindre, d'un cône et d'un ensemble de prismes droits dont un cube. Toutes

4. http ://www.itksnap.org/

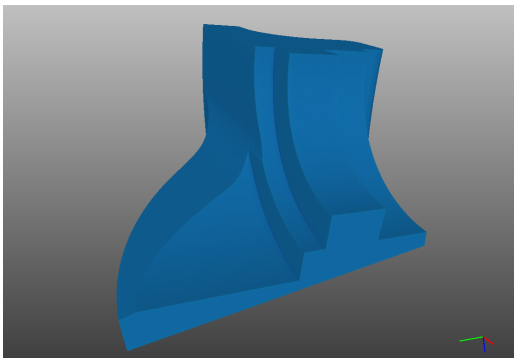


Figure 1.13 – Modèle classique du fandisk [5].

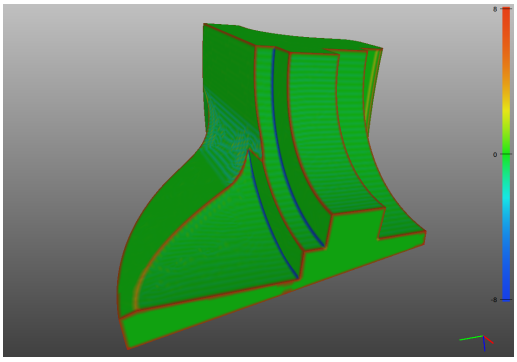


Figure 1.14 – Modèle classique du fandisk avec mise en couleur de la courbure sur une échelle en *HotMetal* sur l'intervalle [-8 ; 8].

ces formes reconnaissables constituent les formes saillantes de cet objet. La méthode classique pour extraire ces formes saillantes est de faire décomposer le maillage sous forme d'un ensemble de régions pour lesquelles toutes les formes saillantes de l'objet sont isolées dans différentes régions. La construction de ces régions utilise les propriétés différentielles de points qui les composent.

En somme, toutes ces caractéristiques de saillance sur un maillage sont basées sur les propriétés différentielles de la surface de l'objet. Mais quelles sont-elles et comment peuvent-elles être obtenues sur un maillage ? La suite de ce chapitre va donner une première réponse à ces questions en commençant par des définitions mathématiques de ces propriétés sur des surfaces continues et en expliquant l'impact du passage d'une surface continue à un maillage.

1.3 Propriétés différentielles d'une surface

Lors d'une analyse ponctuelle d'une surface (ou d'une courbe continue), ses propriétés différentielles sont caractérisées par sa normale et sa courbure. Ces deux

5. http ://research.microsoft.com/research/graphics/hoppe/

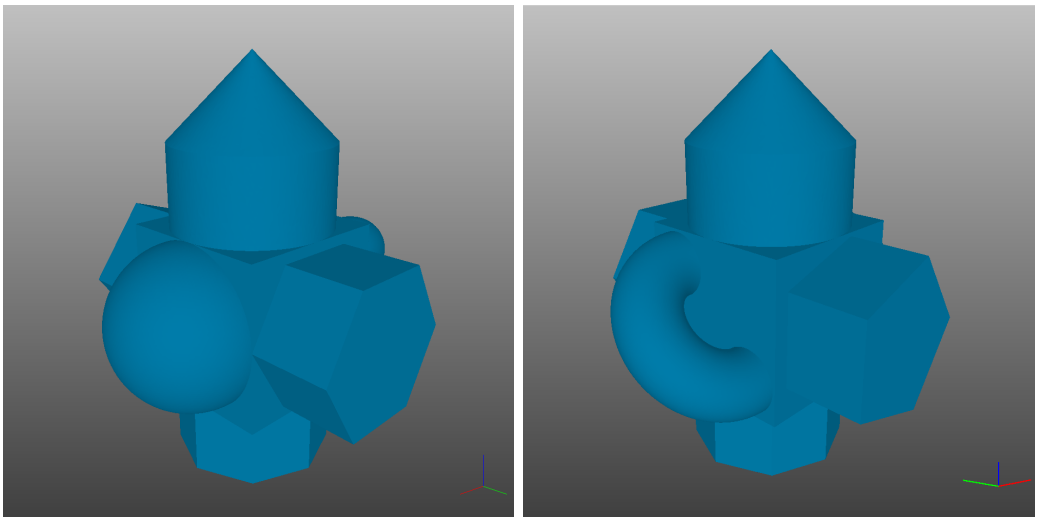


FIGURE 1.15 – Modèle du fantôme créé par Bruno Dutailly sous le modeleur Blender.

caractéristiques sont respectivement liées aux dérivées première et seconde de la surface (ou de la courbe). Nous allons dans un premier temps définir ces propriétés pour des modèles analytiques et dans un second temps voir le passage à un modèle discret dans un espace continu.

1.3.1 Modèle continu

Dans la suite, la majeure partie des définitions et propriétés sont tirées de [BG05] et [AKL63]. La première notion à prendre en compte est que, dans une observation locale de la surface, celle-ci peut être considérée comme une fonction à deux variables qui est une injection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1 *Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$. Localement S est définie comme le graphe de la fonction (cf. [BG05])*

$$z = f(x, y).$$

En pré-requis pour la suite, nous introduisons les notions ci-dessous.

Définition 1.8 (La section d'un plan) *La section d'un plan Υ avec une surface S est la courbe d'intersection entre Υ et S.*

Définition 1.9 (La tangente d'une courbe) *Soit $\mathscr{C}$ la courbe, qui est le graphe d'une fonction g. La tangente de $\mathscr{C}$ en un point P est une droite passant par P et dont le coefficient directeur est égale à $g'(P)$.*

Remarque 1.2 *Si g n'est pas dérivable en P alors la courbe n'a pas de tangente unique en P.*

Définition 1.10 (Le vecteur tangent) *Le vecteur tangent d'une courbe $\mathscr{C}$ en un point P est le vecteur directeur de la tangente de $\mathscr{C}$ en P. Par convention la norme de ce vecteur est de 1.*

Définition 1.11 (Une surface lisse) *Une surface est dite lisse en un point P si toute section de plan passant par P admet une tangente unique en P.*

Après la surface elle-même, la première caractéristique différentielle d'une surface lisse est sa normale et le plan tangent associé.

Définition 1.12 (Le plan tangent) *Soit P le point de coordonnées (a, b, f(a, b)) de S. Le plan tangent τ_{PS} a pour équation :*

$$0 = (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + (z-f(a,b))(-1) \tag{1.3}$$

où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont des coordonnées cartésiennes et f n'est pas nécessairement définie pour tout (x, y) (voir [BG05] 4.2.20 et [AKL63] T.II pour plus de détails).

Remarque 1.3 *Toute surface lisse en un point admet un unique plan tangent en ce point.*

Lemme 1.1 *Toute section d'une surface S passant par un point P admet une unique droite tangente t et t appartient au plan tangent de S en P.*

Définition 1.13 (La droite normale) *La droite normale en un point P d'une surface S (ou d'une courbe $\mathscr{C}$) est, dans une observation locale de celle-ci, l'axe de symétrie de cette surface (ou de cette courbe) en ce point. Elle est par définition la perpendiculaire au plan (ou droite) tangent(e) à S en P.*

Définition 1.14 (Le vecteur normal) *Le vecteur normal est le vecteur directeur de la droite normale en un point P d'une surface S (ou d'une courbe $\mathscr{C}$) orienté vers l'extérieur. Par convention la norme de ce vecteur est de 1. Il est également communément appelé normale de S en P.*

L'équation du vecteur normal d'une surface est analogue à celle du plan tangent et est, pour une fonction $z = f(x, y)$ au point de coordonnées (a, b), de la forme :

$$\widehat{N}_{(a,b)} = \pm \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ 1 \end{pmatrix}_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}} . \tag{1.4}$$

Après la caractérisation de la normale et du plan (ou droite) tangent(e) d'une surface (ou courbe) qui donne une première orientation de la surface en un point P, on peut également caractériser l'évolution de la surface (ou courbe) par rapport

au plan (ou droite) tangent(e) dans les directions tangentielles. Il s'agit alors de caractériser la dérivée seconde de cette surface (ou courbe), c'est-à-dire sa courbure. La courbure correspond à la vitesse d'éloignement de la surface par rapport au plan (resp. droite) tangent(e).

Pour se donner une première intuition de la courbure, nous allons considérer celle d'un cercle (cf. Figure 1.16). Soient C un cercle de rayon r et de centre O et A et B des points de ce cercle. Posons $\widehat{t_A}$ et $\widehat{t_B}$ deux tangentes du cercle C, respectivement en A et B, et orientées dans le même sens selon la courbe de C ; Δ_{AB} la longueur de l'arc AB ; et φ l'angle $\angle(AOB)$. La courbure est le coefficient de changement de direction de la tangente de la courbe au voisinage d'un point. La courbure en A, dénotée k, revient à caractériser la variation entre $\widehat{t_A}$ et $\widehat{t_B}$ quand B tend vers A. On a alors :

$$k = \lim_{\Delta_{AB} \to 0} \frac{\varphi}{\Delta_{AB}}. \tag{1.5}$$

Comme ici la courbe étudiée est celle d'un cercle, on a $\Delta_{AB} = \varphi \cdot r$ constant et

$$k = \frac{1}{r}. \tag{1.6}$$

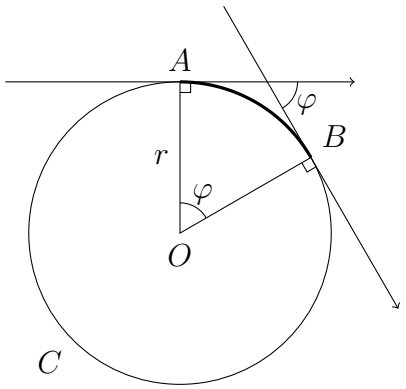


FIGURE 1.16 – Courbure d'un cercle.

Définition 1.15 (Cercle osculateur) *On appelle cercle osculateur d'une courbe $\mathscr{C}$ en un point P le cercle qui touche la courbe en P et en son voisinage. Il est aussi appelé cercle de courbure.*

Remarque 1.4 *Le centre du cercle osculateur d'une courbe $\mathscr{C}$ en un point P se trouve sur l'axe de la normale à $\mathscr{C}$ en P.*

Dans un cas général la définition de la courbure d'une courbe est la suivante :

Définition 1.16 (Courbure 2D) *Soient $\mathscr{C}$ une courbe, P un point quelconque de cette courbe et C le cercle osculateur de cette courbe en P de rayon r (cf. Figure 1.17). La courbure k de $\mathscr{C}$ en P est alors égale à :*

$$k = \frac{1}{r}.$$

r est alors appelé le rayon de courbure.

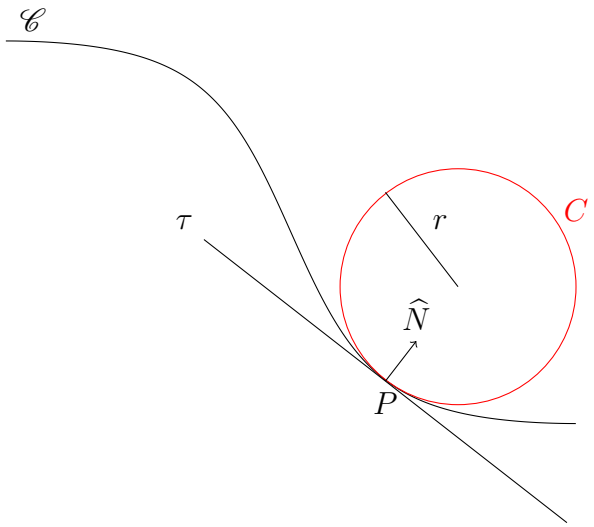


Figure 1.17 – Géométrie d'une courbe continue.

En ce qui concerne la courbure en un point d'une surface, il existe une infinité de directions tangentielles en ce point. De ce fait, il y a potentiellement différents coefficients de courbure de la surface par rapport au plan tangent. Ainsi la notion de courbure en un point d'une surface peut être appréhendée par la notion de courbure normale.

Définition 1.17 (Courbure normale) *On appelle courbure normale k d'une surface S en un point P et dans une direction tangentielle $\widehat{t}$, la courbure de la section normale de S en P dont le plan de section contient $\widehat{t}$. Cette courbure est signée selon l'opposition ou la concurrence de la normale $\widehat{n}$ de la courbe issue de la section par rapport la normale de la surface $\widehat{N}$. On a :*

$$k = \frac{-(\widehat{n} \cdot \widehat{N})}{r}. \tag{1.7}$$

On obtient aussi une infinité de courbures normales en un point P (cf. Figure 1.18). Mais comme la surface est lisse en P, Euler définit une relation entre ces différentes courbures normales. De ses travaux, il en découle que les courbures normales sont caractérisées par :

- deux courbures principales k_1 et k_2, respectivement les courbures normales maximale et minimale,
- ces deux courbures principales sont dans des directions tangentielles orthogonales $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$ (cf. Figure 1.19),
- il existe une formule qui exprime toutes les courbures normales en fonction de l'angle orienté entre leur direction tangentielle $\widehat{t}$ et la direction principale $\widehat{e_1}$. On note θ cet angle ($\theta = \measuredangle(\widehat{e_1}, \widehat{t})$). On a alors la formule suivante :

$$k(\theta) = k_1 \cdot \cos^2\theta + k_2 \cdot \sin^2\theta \text{ (équation d'Euler).} \tag{1.8}$$

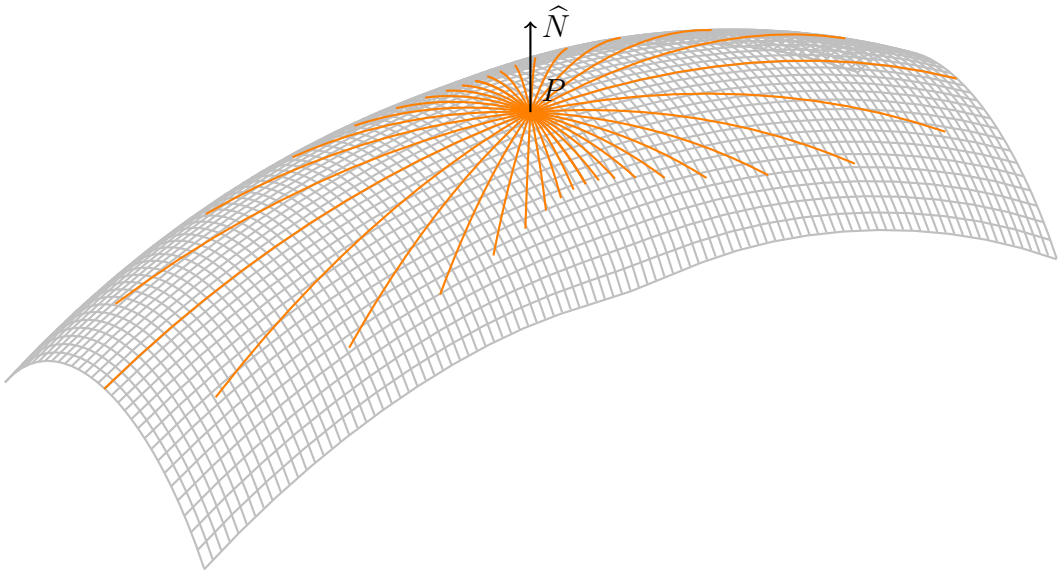


FIGURE 1.18 – Courbures normales : sur la figure la longueur des arcs orange représentant la courbure est proportionnelle au rayon de courbure.

Toutefois il existe un point particulier pour lequel les directions principales ne sont pas déterminées. Ces points sont les ombilics.

Définition 1.18 (Ombilic) *Un ombilic est un point d'une surface pour lequel les courbures principales sont de la même valeur. Autrement dit, toutes les courbures normales sont de la même valeur.*

Pour exemple, tous les points d'une sphère ou d'un plan sont des ombilics (cf. Figure 1.20).

Pour aller plus loin, les travaux de Meusnier ont permis de définir une relation entre les courbures normales et celles des sections obliques (non-normales). On a alors le théorème suivant :

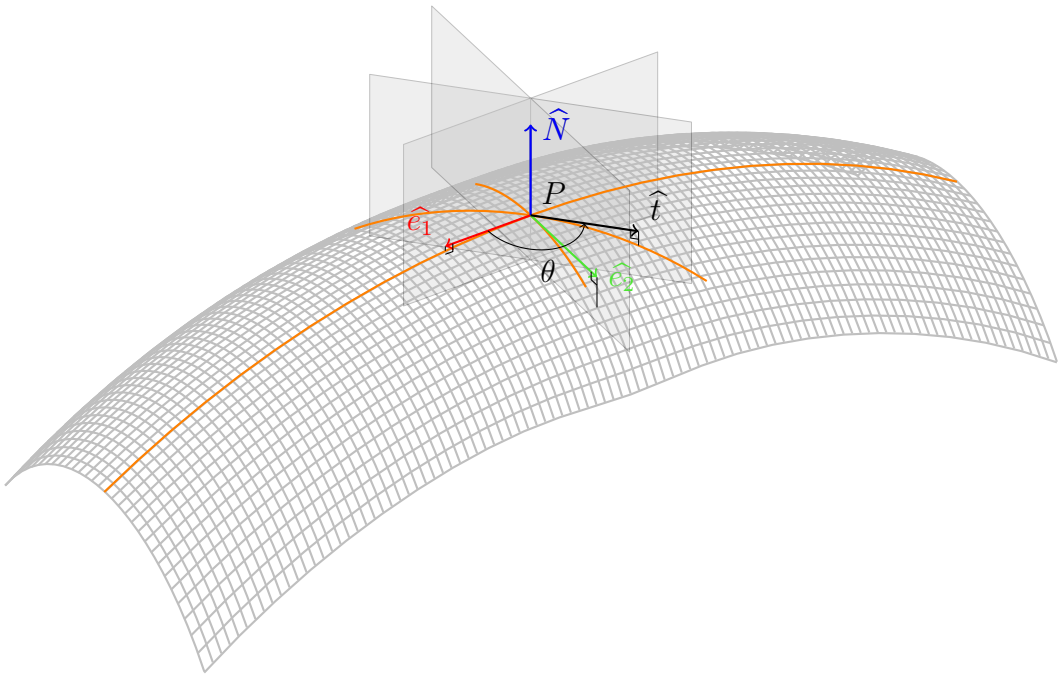


Figure 1.19 – Base orthonormée référentielle de l'équation d'Euler (Équation (1.8)).

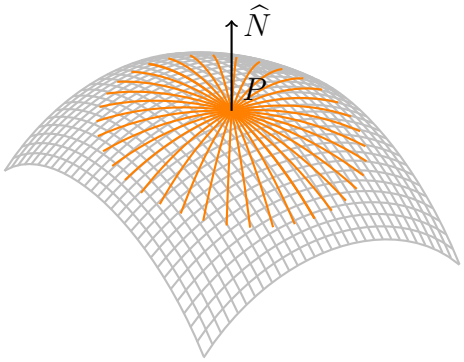


Figure 1.20 – Courbures normales autour d'un point ombilic.

Théorème 1.2 (Théorème de Meusnier) *Soit la section de plan $\mathcal{L}$ formée par un plan quelconque Υ passant par un point P de la surface S (i.e. Υ ne contient pas nécessairement la normale de la surface $\widehat{N}$) (cf. Figure 1.22). Soit ϱ l'angle orienté entre $\widehat{n}$ et $\widehat{N}$. La courbure $k_{\mathcal{L}}$ de la courbe $\mathcal{L}$ au point P est liée à la courbure $k_{\mathcal{L}}$ de la section normale de la même direction (i.e. le plan Υ et le plan de la section normale coupent le plan tangent à la même ligne droite) à P par la formule :*

$$k_{\mathcal{C}} = k_{\mathcal{L}} \cdot \cos(\varrho). \tag{1.9}$$

Remarque : ϱ correspond à l'angle dièdre entre les plans qui contiennent $\widehat{n}$ et $\widehat{N}$.

Définition 1.19 (Angle dièdre) *L'angle dièdre est l'angle maximal entre deux plans. Soient Q_1 et Q_2 deux plans quelconques, W un plan orthogonal à Q_1 et à Q_2. L'angle dièdre ψ entre Q_1 et Q_2 est l'angle entre les droites d'intersection entre W et Q_1 et entre W et Q_2 dans le plan W (cf. Figure 1.21).*

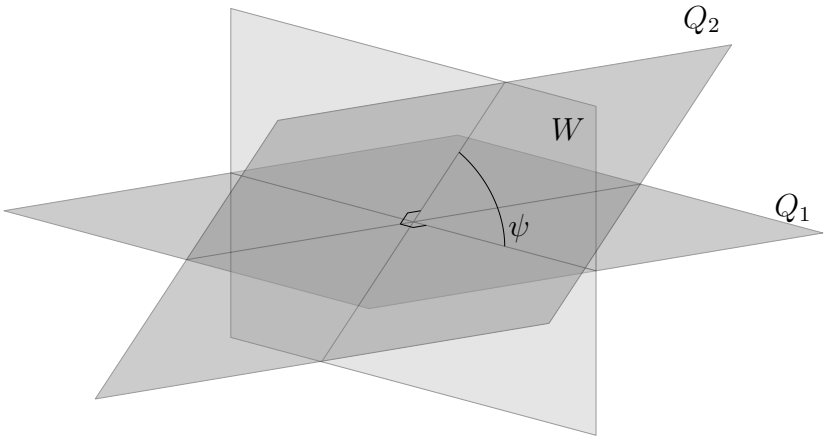


FIGURE 1.21 – Schéma de l'angle dièdre entre les plans Q_1 et Q_2.

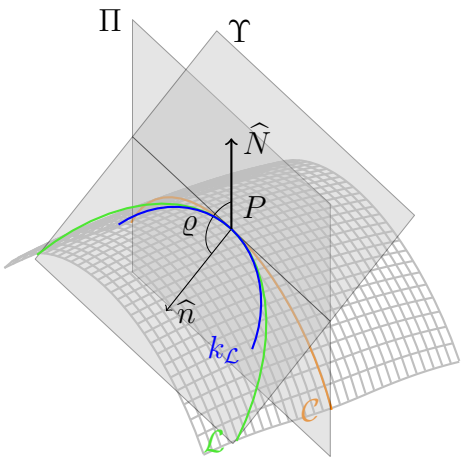


FIGURE 1.22 – Resprésentation des hypothèses du théorème de Meusnier.

Au final, la courbure d'une surface est représentée par les deux valeurs principales k_1 et k_2 avec leurs directions. Mais pour simplifier la description de cette courbure, il existe deux valeurs calculées et communément utilisées à savoir la courbure moyenne

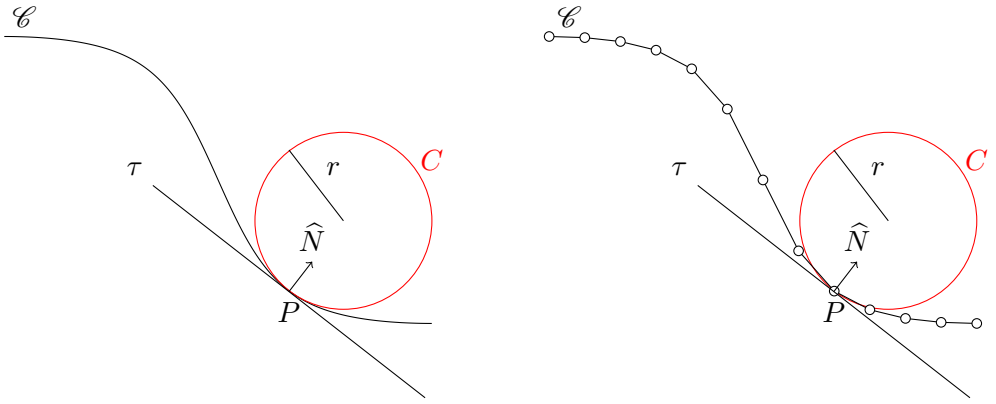
notée k_H ou H et la courbure gaussienne notée k_G ou K. La courbure gaussienne est aussi appelée courbure totale. Ces deux valeurs sont définies comme suit :

$$k_H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \tag{1.10}$$

$$k_G = k_1 \cdot k_2. \tag{1.11}$$

1.3.2 Modèle discret (Maillage 3D)

Pour donner l'intuition d'une surface discrétisée sous forme de maillage (cf. Définition 1.1), nous allons commencer par définir une courbe discrétisée. Plaçons-nous dans un contexte expérimental, dans lequel on cherche à retrouver la trajectoire d'un objet réel en mouvement à partir d'un ensemble de photos fixes à des temps différents. Si l'on superpose ces photos, on obtient les différentes positions observées dans le temps de notre objet. De ce fait, on a un ensemble de points qui se suivent chronologiquement parlant, dans un espace continu à deux dimensions. La trajectoire de notre objet peut alors être approximée par un ensemble de segments qui lient les points consécutifs entre eux (cf. Figure 1.23(b)). Pour une surface, on retrouve une construction analogue sauf que nous avons là des points à coordonnées 3D et que l'élément de base pour définir une surface n'est pas un segment mais un triangle. On obtient alors un ensemble de points appelés sommets, joints par des triangles appelés facettes.



(a) Courbe continue (b) Courbe discrète

Figure 1.23 – Géométrie d'une courbe continue discrétisée.

Le calcul de la normale et de la courbure en un sommet P repose sur la géométrie de la surface en ce point. Les maillages n'offrent qu'une information très clairsemée de celle-ci définie par un voisinage à l'image de la courbe discrétisée de la Figure 1.23(b). Ce voisinage est un ensemble de points échantillonnés sur la surface

à proximité de P. Certains estimateurs de courbure (resp. normale) utilisent nécessairement ce que l'on appelle le premier cercle de voisinage. Par exemple le *DCO (Discret Curvature Operator : Opérateur de Courbure Discret)* [MLBD02] repose sur une série de points ordonnés dans le sens trigonométrique direct autour de la normale et fait une estimation globale des courbures. D'autres estimateurs peuvent utiliser des cercles de voisinage de distances quelconques.

1.4 Critères d'analyse

Notre objectif est d'extraire les informations de saillance par l'estimation des propriétés différentielles d'un maillage. Pour cela, nous avons besoin d'estimateurs qui seraient, pour une même échelle de maillage, peu sensibles à l'organisation spatiale du voisinage tout en donnant une estimation fiable et précise de la géométrie de la surface. Toutefois, les estimateurs de normale et de courbure ont différentes approches pour retrouver les propriétés différentielles d'une surface. Ces approches induisent dans certains cas des problèmes de stabilité et/ou de précision. Afin de mettre une base de comparaison, nous utilisons trois critères : la stabilité, la précision et la convergence.

1.4.1 Stabilité

Comme nous avons pu le voir précédemment, une même surface analytique peut engendrer une infinité de maillages 3D pour la représenter. Ceci donne lieu à différentes configurations de voisinage. Notons que les distances entre P et ses voisins induisent une inconnue qui est le comportement de la surface entre P et chaque point du voisinage. Plus exactement cela donne lieu à différentes répartitions spatiales du voisinage autour de P. Un estimateur de normale ou courbure est dit stable s'il n'est pas sensible aux variations de répartitions spatiales du voisinage pour une même distance de voisinage donnée (cf. Définition 1.3 et Remarque 1.1).

1.4.2 Précision

La précision est un des premiers critères attendus de tout estimateur. Il dénote la différence entre la vérité terrain et la valeur estimée. Plus un estimateur est précis, plus son estimation est proche de la valeur théorique. La variation d'un descripteur de surface est un outil important : par exemple la variation de la normale peut être utilisée en segmentation de maillages [CSAD04, KYL02].

1.4.3 Convergence

La convergence d'un estimateur de propriétés différentielles est un critère indépendant de sa précision. La convergence implique une condition de non régression.

Définition 1.20 ***(Convergence ponctuelle d'un estimateur de propriétés différentielles)***

Soient P un point d'une surface S, d une distance d'échantillonnage (cette distance est relative au schéma de construction des $\{P_{i_d}\}$) de S par rapport à P et $\{P_{i_d}\}$ un ensemble de points de S et voisins de P. Les éléments de $\{P_{i_d}\}$ sont construits tels que pour tout P_{i_d}, $\|\overrightarrow{PP}_{i_d}\| = d$ et la répartition spatiale des $\{P_{i_d}\}$ reste constante par rapport à d.

Notons $Estim(P, \{P_{i_d}\}) = v$ la fonction qui à P et $\{P_{i_d}\}$ associe la valeur donnée par un estimateur d'une propriété différentielle sur un maillage $Estim$.

L'estimateur est dit convergent à la condition que $Estim(P, \{P_{i_d}\}) = v$ soit une fonction monotone et admette une limite quand $d \to 0$. Sinon il est dit non-convergent. [GS03]

Définition 1.21 (Distance échantillonnage) *La distance d'échantillonnage est une distance euclidienne ou angulaire entre les sommets du voisinage. Par exemple :*

- *pour les échantillonnages par intersection entre une sphère et la surface de l'objet 3D, la distance d'échantillonnage est le rayon de cette sphère.*
- *pour les échantillonnages par projections orthogonales de grilles régulières de $\mathbb{R}^2$, la distance d'échantillonnage est la distance euclidienne moyenne entre les sommets de la grille 2D.*
- *pour les échantillonnages à angles réguliers comme l'UV-Sphère la distance d'échantillonnage est définie par le pas angulaire entre chaque sommets autour de l'axe z.*

Si un estimateur satisfait le critère de convergence, cela permet d'établir que son erreur d'estimation est directement liée à la distance d'échantillonnage et à la répartition spatiale du voisinage. La convergence globale appelée aussi convergence uniforme implique une convergence de l'estimateur en tout point de la surface.

Chapitre 2

Estimation de la courbure

Les estimateurs de courbure ont pour but de retrouver les informations suivantes : les courbures moyenne k_H, gaussienne k_G, maximale k_1 et minimale k_2 et les directions principales associées $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$. Ils sont basés sur un ensemble de points $\{P_i\}$ définissant le voisinage du point d'analyse P. Comme nous avons pu le voir précédemment, les propriétés différentielles sont les descripteurs de base pour extraire la saillance que l'on souhaite. Dans cette optique, nous avons recherché un estimateur qui pourrait répondre à nos besoins. Dans ce chapitre, nous commencerons par faire un état de l'art des différents estimateurs de courbure en les classant par catégories et en déterminant un représentant de chacune. Puis nous présenterons la nouvelle méthode que nous proposons.

2.1 Méthodes existantes

Depuis les premiers travaux dans le domaine [BJ86, San89, FJ89], l'estimation de la courbure est le sujet de nombreuses recherches, propositions d'estimateurs et survols [MD02, Pet02, SMS+03, BDM05].

Nous avons isolé certains d'entre eux par leur redondance dans les survols et leurs différentes approches. Nous les avons classés par catégories et avons choisi des représentants pour chacune. Il en ressort quatre catégories (cf. Figure 2.1) :

- La première correspond aux méthodes par calcul direct sur la géométrie du maillage, que l'on qualifie de discrètes et parmi elles, nous avons choisi la méthode *DCO* (Discret Curvature Operator) [MLBD02].
- La seconde correspond aux méthodes par régressions de surfaces qui consistent à ajuster une surface analytique à l'ensemble de points pour en extraire la géométrie. Pour cette catégorie, nous avons retenu la méthode *SFQA* (Simple Quadratic Fitting (régression sur quadrique simple)) [MV97].
- La troisième catégorie correspond aux méthodes par analyse en composante principale (*ACP*) dans le domaine de la dérivée seconde. On choisit les méthodes de [Tau95] et [LBS07].

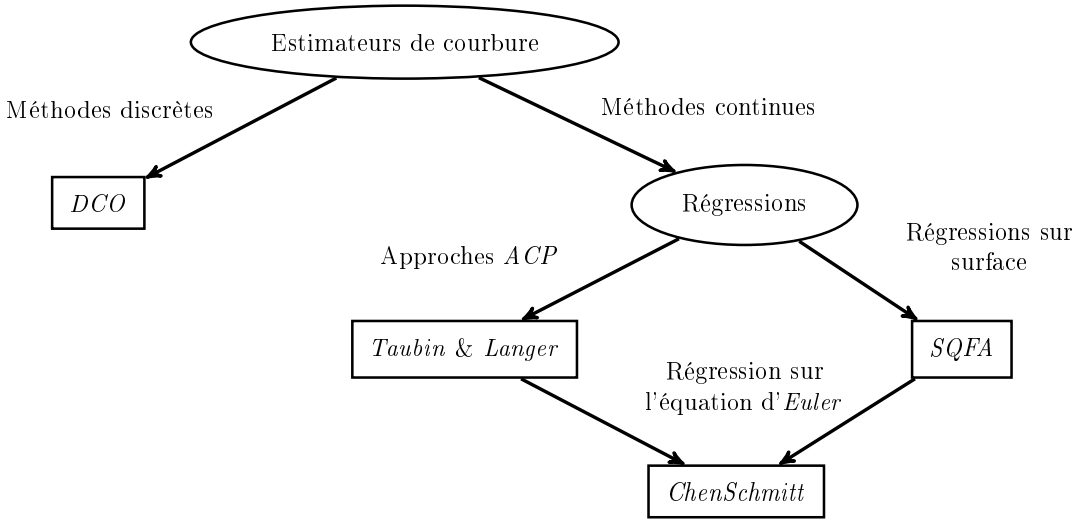


FIGURE 2.1 – Classification des estimateurs de courbure.

– Enfin la quatrième catégorie correspond aux méthodes hybrides entre les deux dernières. Elles utilisent une régression dans le domaine de la dérivée seconde contrainte par l'équation d'Euler. Pour cette dernière catégorie nous avons choisi la méthode *ChenSchmitt* [CS92].

2.1.1 *DCO* (opérateur de courbure discret)

La méthode *DCO* de [MLBD02] est basée sur un moyennage spatial pondéré par les angles. Plus exactement, elle est l'application du théorème de Gauss-Bonnet (résumé dans [Haz88] et détaillé dans [Gau00, Gau12, Bon48, Sha73]) discrétisé sur un voisinage de premier cercle (Équation (2.3)) pour calculer la courbure gaussienne k_G. La courbure moyenne est estimée par la discrétisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami (Équation (2.4)).

$$2k_H\widehat{N} = \lim_{diam(A)\to 0} \frac{\nabla A}{A} \tag{2.1}$$

$$k_G = \lim_{diam(A)\to 0} \frac{\nabla A^G}{A} \tag{2.2}$$

Soit E l'infinitésimale région autour de P. Les notations utilisées sont A l'aire de E, $diam(A)$ le diamètre de E, ∇ le gradient dans les coordonnées (x, y, z) et A^G l'image de l'application de Gauss associée à E (cf. [BG05] 6.8.13).
Meyer *et al.* utilisent le moyennage spatial pour le calcul des limites dans (2.1) et (2.2).

$$k_G = \frac{2\pi - \sum_{i=0}^{m} \gamma_i}{A_{Mixed}} \tag{2.3}$$

où γ_i sont les angles des faces voisines en P et A_{Mixed} est une somme d'aires calculées sur les facettes voisines.

$$2 \cdot k_H \cdot \widehat{N} = \frac{\sum_{i=0}^{m} (\cot(\alpha_i) + \cot(\beta_i)) \cdot \overrightarrow{PP_i}}{2A_{Mixed}} \tag{2.4}$$

où α_i et β_i sont les angles opposés à la base PP_i dans les facettes adjacentes (voir Figure 2.2) et $\widehat{N}$ est la normale en P. Le calcul des pondérations A_{Mixed} par les aires proposé par [MLBD02], pour minimiser les erreurs de calcul, est de prendre les aires de Voronoï adjacentes à P. Celles-ci correspondent aux sous-zones des faces définies par les quadrilatères suivants $(PM_iC_iM_{i+1})$ où (comme sur la Figure 2.2) PP_i et PP_{i+1} sont les arêtes des faces adjacentes à P ; M_i et M_{i+1} sont les milieux de ces arêtes et C_i le centre du cercle circonscrit au triangle (PP_iP_{i+1}). Ce qui donne l'équation suivante :

$$A_{Mixed} = A_{Voronoi} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=0}^{m} (\cot(\alpha_i) + \cot(\beta_i)) \cdot \|\overrightarrow{PP_i}\|^2. \tag{2.5}$$

Toutefois, si le triangle est obtus alors il faut utiliser le milieu de la base opposée à l'angle obtus à la place de C_i, car C_i est alors en dehors du triangle.

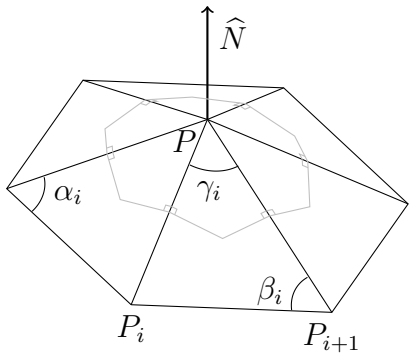


FIGURE 2.2 – Premier cercle de voisinage avec la construction des aires réduites par la méthode *DCO*.

Cette méthode ne permet de calculer que k_H et k_G.

2.1.2 *SQFA* (régression sur Quadrique Simple)

Pour calculer la courbure de la surface S au point P, McIvor et al. [MV97] utilisent une approximation locale de la surface par une forme quadratique.

Soit X le repère orthonormal centré au point P, $X = [x, y, z]^T$, où l'axe z est colinéaire à $\widehat{N}$, et les axes x et y sont colinéaires aux directions principales $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$.
Dans le repère X, la surface S est représentée localement en P par la forme quadratique principale [BG05] suivante :

$$z = ax^2 + cy^2 \tag{2.6}$$

avec les coefficients $a = \frac{k_1}{2}$ et $c = \frac{k_2}{2}$.
Pour calculer la forme quadratique principale (2.6), McIvor *et al.* utilisent son image par rotation autour de la normale.
Soit $\dot{X}$ le repère orthonormal centré au point P, $\dot{X} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$, où l'axe $\dot{z}$ est colinéaire à la normale $\widehat{N}$.
Dans le repère $\dot{X}$, la surface S est représentée par :

$$\dot{z} = a'\dot{x}^2 + b'\dot{x}\dot{y} + c'\dot{y}^2. \tag{2.7}$$

La rotation $\rho_{\dot{z}}$ autour de la normale $\widehat{N}$ à l'angle Θ

$$\Theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{b'}{(a' - c')}\right) \tag{2.8}$$

transforme $\dot{X}$ en X et (2.7) en (2.6)

$$X = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{X}. \tag{2.9}$$

Les coefficients a et c sont donnés par :

$$a = \frac{a' + c' + \sqrt{(a' - c')^2 + (b')^2}}{2} \tag{2.10}$$

et

$$c = \frac{a' + c' - \sqrt{(a' - c')^2 + (b')^2}}{2} \tag{2.11}$$

Comme indiqué, l'avantage de construire (2.7) à la place de (2.6) est que le problème de l'évaluation de la forme quadratique principale est partagé en deux sous-problèmes séparés : en premier l'évaluation de la normale qui a toujours une solution unique pour les surfaces continues, et ensuite, l'évaluation des directions principales qui, pour des ombilics, a une infinité de solutions.[1] L'évaluation des courbures discrètes par approximation quadratique est composée par les étapes suivantes :

1. L'estimation de la normale $\widehat{N}$ au point P.

1. Dans les ombilics $k_1 = k_2$ alors tout e_θ est une direction principale et en conséquence on pourra choisir $\Theta = 0$.

2. L'estimation de $\dot{X}$

$$\dot{X} = \dot{R}(X_w - X_w^P) \tag{2.12}$$

où X_w^P dénote les coordonnées du point P dans le repère global X_W et

$$\dot{R} = [\widehat{r_1}\ \widehat{r_2}\ \widehat{r_3}] \tag{2.13}$$

avec

$$\widehat{r_1} = \frac{(I_3 - \widehat{N}\widehat{N}^T)\widehat{e_1}}{\|(I_3 - \widehat{N}\widehat{N}^T)\widehat{e_1}\|} \qquad \widehat{r_2} = \widehat{N} \wedge \widehat{r_1} \qquad \widehat{r_3} = \widehat{N}. \tag{2.14}$$

3. L'estimation de (2.7).

Pour pallier les erreurs d'estimation de $\widehat{N}$, deux variations de (2.7) sont utilisées :

$$\dot{z} = a'\dot{x}^2 + b'\dot{x}\dot{y} + c'\dot{y}^2 + d'\dot{x} + e'\dot{y} \tag{2.15}$$

et

$$\dot{z} = a'\dot{x}^2 + b'\dot{x}\dot{y} + c'\dot{y}^2 + d'\dot{x} + e'\dot{y} + f'. \tag{2.16}$$

Une analyse comparative des différentes variantes de la méthode d'évaluation de courbures discrètes par approximation quadratique est donnée par [MV97]. Leurs expérimentations démontrent que pour la précision de l'évaluation, l'importance du choix de la forme quadratique, (2.7), (2.15) ou (2.16), est secondaire par rapport au choix de la méthode d'estimation de la normale $\widehat{N}$ au point P.

2.1.3 Tenseur de courbure : *Taubin & Langer*

Méthode initiale proposée par Taubin

Taubin *et al.*, dans la méthode que nous noterons *Taubin* [Tau95], commencent par considérer localement une surface S en un point P dans un repère orthonormé $(P, \widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{N})$. Dans ce repère, ils utilisent l'équation d'Euler (Équation 1.8) pour décrire la courbure normale en fonction des directions tangentielles. Soit $\widehat{T_i}$ un vecteur tangent en P à S, alors $\widehat{T_i}$ est un vecteur de dimension 2 dans le plan tangent défini par les vecteurs $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$. On a $\widehat{T_i} = (t_{i_1}, t_{i_2})$ dans la base $(P, \widehat{e_1}, \widehat{e_2})$. Dans cette base de dimension 2, la courbure normale en fonction de $\widehat{T_i}$ (k_i), en prenant sa forme quadratique principale comme dans [Tho79, DCM76], peut s'écrire comme suit :

$$k_i = \begin{pmatrix} t_{i_1} \\ t_{i_2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{i_1} \\ t_{i_2} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

La généralisation de cette formule, à 3 dimensions, pour une direction quelconque (non-nécessairement tangente), donne l'équation suivante :

$$k_i = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_{i_1} \\ t_{i_2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_0 \\ t_{i_1} \\ t_{i_2} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

où $\widehat{T_i} = t_0 \cdot \widehat{N} + t_{i_1} \cdot \widehat{e_1} + \widehat{t_{i_2}} \cdot \widehat{e_2}$. Si $\widehat{T_i}$ était un vecteur tangent alors $\widehat{t_0}$ serait nul.

Ils reprennent ensuite l'équation d'Euler (1.8) pour définir la forme matricielle de son tenseur de courbure :

$$M_P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\widehat{T_\theta}) \widehat{T_\theta} \widehat{T_\theta}^T d\theta. \tag{2.19}$$

Comme $\widehat{T_\theta} \widehat{T_\theta}^T$ est une matrice de rang 1, pour tout θ, la normale $\widehat{N}$ est un vecteur propre de cette matrice et la valeur propre associée est 0. Aussi le système peut se réécrire comme suit :

$$M_P = \begin{pmatrix} \widehat{T_1} & \widehat{T_2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{T_1} & \widehat{T_2} \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Les valeurs de k_1 et k_2 sont extraites par :

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 \cdot m_{11} - m_{22}, \\ k_2 &= 3 \cdot m_{22} - m_{11}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour l'approximation de k_i, ils considèrent l'intersection entre le plan normal contenant T_i et la surface S comme une courbe lisse $x(s)$ où s est la longueur d'arc de cette courbe entre P et P_i sur S. Par développement en série de Laurent de second ordre (cf. [WA04] (6.68)), dans ce cas on a $x'(0) = \overrightarrow{PP_i}$ et $x''(0) = -k_i \widehat{N}$ et ils obtiennent :

$$\begin{aligned} x(s) &= x(0) + x'(0)s + \frac{1}{2} x''(0) s^2 + O(s^3) \\ &= P + \overrightarrow{PP_i} - \frac{1}{2} k_i \widehat{N} s^2 + O(s^3). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Il en découle :

$$2\widehat{N}^T (P - x(s)) = k_i \cdot s^2 + O(s^3)$$

et

$$\|P - x(s)\|^2 = s^2 + O(s^3)$$

qui combinées donnent :

$$\frac{2\widehat{N}^T (P - x(s))}{\|P - x(s)\|^2} = k_i + O(s^3). \tag{2.23}$$

Ils définissent k_i quand s tend vers 0 :

$$k_i = \lim_{s \to 0} \frac{2\widehat{N}^T (P - x(s))}{\|P - x(s)\|^2}, \tag{2.24}$$

ce qui donne l'approximation :

$$k_i \approx \frac{2\widehat{N}^T(\overrightarrow{P_iP})}{\|\overrightarrow{P_iP}\|^2}. \tag{2.25}$$

Les directions principales ne sont pas connues par avance. Aussi ils définissent $\tilde{M}_P$, une approximation de M_P.

$$\tilde{M}_P = \sum_i w_i k_i \widehat{T}_i \widehat{T}_i^T \tag{2.26}$$

où :

$$\widehat{T}_i = \frac{(\widehat{I} - \widehat{N}\widehat{N}^T)(\overrightarrow{P_iP})}{\|(\widehat{I} - \widehat{N}\widehat{N}^T)(\overrightarrow{P_iP})\|}. \tag{2.27}$$

De plus, soit $A_i = Aire(\text{faces adjacentes à } (PP_i))$ on a :

$$w_i = \frac{A_i}{\sum_j A_j} \tag{2.28}$$

et

$$\sum_i w_i = 1. \tag{2.29}$$

Modifications proposées par Langer

Par la suite, Langer *et al.* reprennent la méthode de Taubin *et al.* dans [LBS07] et y apportent une modification dans le calcul des poids w_i. Ils estiment la formule discrète de k_H (2.30) au lieu de la pondération par les aires des faces voisines :

$$k_H = \sum_i \omega_i k_i \text{ où } \omega_i = \frac{\tan\beta_{i-1} + \tan\beta_i}{\sum_j \tan\beta_{j-1} + \tan\beta_j} \tag{2.30}$$

où β_i est l'angle entre les courbes d'intersections des plans normaux contenant $\overrightarrow{PP_i}$ et $\overrightarrow{PP}_{i+1}$, et la surface S (cf. Figure 2.3). Mais β_i n'étant pas mesurable, ils l'approximent avec les angles $\alpha_i = \angle(\overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{PP}_{i+1})$. Ce qui donne :

$$k_H \approx \sum_i w_i k_i \tag{2.31}$$

et

$$w_i = \frac{\tan\alpha_{i-1} + \tan\alpha_i}{\sum_j \tan\alpha_{j-1} + \tan\alpha_j}. \tag{2.32}$$

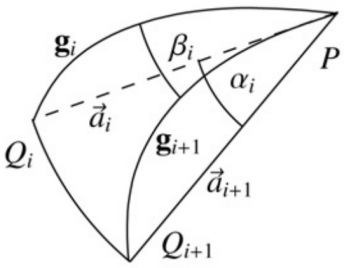


FIGURE 2.3 – Les angles dans le voisinage d'un maillage (partie centrale de la Figure 1 de [LBS07]).

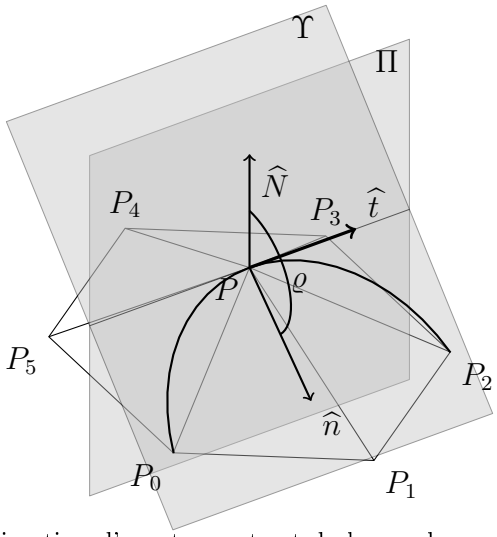
2.1.4 *ChenSchmitt*

Le calcul de la courbure par la méthode *ChenSchmitt* [CS92] est basé sur le Théorème de Meusnier (Théorème 1.2). Il consiste à faire des évaluations de courbures normales par approximation des courbures de sections de plans non-normaux. Rappelons que le théorème de Meusnier donne la corrélation entre la courbure normale en un point P dans une direction $\widehat{t}$ donnée et toutes les autres courbures non-normales de la surface qui partagent le même vecteur tangent en fonction de l'angle entre la normale de la coupe et celle de la surface. Cette méthode consiste à construire des cercles entre des triplets de points constitués de P et de deux voisins distincts dans $\{P_i\}$. Par exemple la Figure 2.4(a) donne le cercle de courbure estimé à partir du triplet $\{P_0, P, P_2\}$. Il en découle le vecteur tangent $\widehat{t}$ de ce cercle en P et une estimation de la courbure normale dans cette direction. Les Figures 2.4(b) et 2.4(c) donnent respectivement l'ensemble des cercles calculables et les tangentes en résultant.

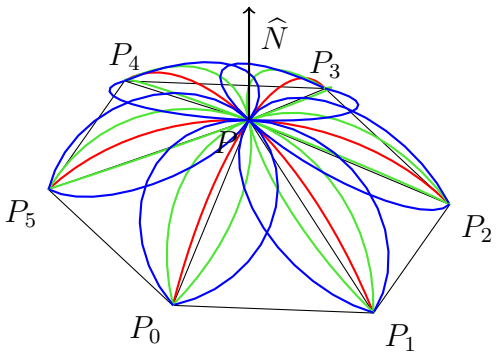
Le détail de la méthode est le suivant :

1. Construction de l'ensemble des triplets possibles (P_a, P, P_b) appelé $\{T_j\}$ tels que (P_a, P, P_b) et (P_b, P, P_a) sont indifférentiables et $a \neq b$. Sur chacun des ces triplets, on calcule un coefficient w tel que $w = \langle \overrightarrow{P_aP}, \overrightarrow{PP_b} \rangle$. Ce coefficient correspond à un coefficient d'opposition entre les deux vecteurs du triplet.
2. Sélection d'un sous-ensemble des triplets noté $\{T'_j\}$: les triplets sont triés par ordre décroissant sur w. Puis la méthode préconise de n'en garder que les m premiers, m étant le nombre de voisins de P. Ainsi, on a $|\{T'_j\}| = |\{P_i\}|$.
3. Évaluation des courbures normales k_j : pour chacun des triplets de $\{T'_j\}$, il en découle $\widehat{n_j}$, $\widehat{t_j}$ et $\bar{k_j}$ respectivement la normale, la tangente et la courbure de la section de plan oblique. L'évaluation de k_j dans la direction de $\widehat{t_j}$ se fait par l'utilisation directe du Théorème de Meusnier. Soit ϱ_j l'angle non-orienté entre $\widehat{n_j}$ et $\widehat{N}$ (cf. Figure 2.4(a)), on a :

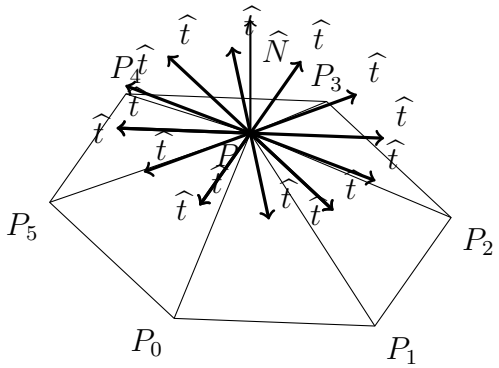
$$k_j = \cos(\varrho_j) \cdot \bar{k_j}. \tag{2.33}$$



(a) Estimation d'une tangente et de la courbure normale à partir d'un cercle dans un plan passant par P



(b) Ensemble de cercles circonscrits construits sur les $\{T_i\}$



(c) Ensemble de tangentes construites sur les $\{T_i\}$

FIGURE 2.4 – Schémas de la méthode *ChenSchmitt*.

4. Régression sur une équation d'Euler transformée : Chen et Schmitt proposent une transformation de l'équation d'Euler (1.8) par substitution de variables. Ils définissent :

$$\xi = \frac{\cos(\theta_j)}{\sqrt{|k_j|}} \text{ et } \zeta = \frac{\sin(\theta_j)}{\sqrt{|k_j|}}. \tag{2.34}$$

Comme la direction principale $\widehat{e_1}$ qui sert dans le calcul des θ est toujours indéterminée, ils proposent de prendre comme direction principale la tangente du triplet qui se trouve en tête à la suite du tri. L'équation se réécrit alors :

$$k_1 \cdot \xi^2 + k_2 \cdot \zeta^2 = \pm 1. \tag{2.35}$$

Cette équation correspond à des ellipses (k_1 et k_2 ont le même signe) et suppose

que la direction principale estimée est correcte. Pour généraliser l'équation à toutes les surfaces, ils définissent la forme suivante :

$$A \cdot \xi^2 + B \cdot \xi \cdot \zeta + C \cdot \zeta^2 = \pm 1. \tag{2.36}$$

L'équation est alors résolvable par la méthode des moindres carrés avec un minimum de trois voisins.

5. Lecture des valeurs : les valeurs des courbures principales sont alors calculées comme suit :

$$k_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4 \cdot B^2} \right), \tag{2.37}$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4 \cdot B^2} \right). \tag{2.38}$$

2.2 Éléments de comparaison

Pour comparer ces estimateurs entre eux, nous les avons appliqués sur un ensemble de surfaces analytiques discrétisées comme une *UV-Sphère* et des fonctions paramétrées à deux variables (voir le chapitre 4 pour plus de détails). De ces premiers tests et des études comparatives qui ont été faites entre eux, il ressort :

- comme le montre expérimentalement [GS03] et par la théorie [BDM05], l'estimateur discret *DCO* ne converge pas toujours. En effet, pour certaines configurations des triangles du voisinage, comme on peut le voir sur la Figure 2.5, la forme discrète de l'application de Gauss peut créer une incohérence dans celle-ci due à une intersection des contours dans l'image projetée. De plus, en ce qui concerne son évaluation de la courbure gaussienne, l'estimateur *DCO* est précis sur un maillage régulier (cf. Figure 2.7(a)) mais l'est moins quand le voisinage est perturbé (cf. Figure 2.6(a)).
- la modélisation de la surface par une fonction quadratique (*SQFA*) donne de très bons résultats sur un maillage avec une discrétisation régulière. Mais comme on peut le voir sur l'*UV-Sphère* à la Figure 2.6(b), quand le voisinage est perturbé, l'estimateur *SQFA* est beaucoup moins précis que la plupart des méthodes.
- *Taubin* donne un bon résultat sur la courbure moyenne sur le test de l'*UV-Sphère*. Mais comme on peut le voir sur la Figure 2.6(c), elle donne un très mauvais résultat pour la courbure gaussienne. La méthode est également peu précise sur un maillage régulier comme on peut le voir sur la Figure 2.7(c).
- la méthode de Langer *et al.* donne un résultat parfait sur l'*UV-Sphère* (cf. Figure 2.6(d)). Le résultat global sur la surface *Polynomiale cubique* est correct mais certains sommets du maillage donnent des valeurs très erronées.
- enfin la méthode *ChenSchmitt* donne également de très bons résultats sur l'*UV-Sphère* (cf. Figure 2.6(e)).

De l'ensemble des méthodes sélectionnées dans ce comparatif, certaines sont visiblement meilleures que d'autres mais aucune ne ressort comme étant systématiquement la plus fiable et/ou la plus stable aux perturbations de la répartition du voisinage. Dans l'optique d'améliorer cela, nous avons élaboré et implémenté une nouvelle méthode basée sur l'équation d'Euler 1.8 appelée *SineFitting*.

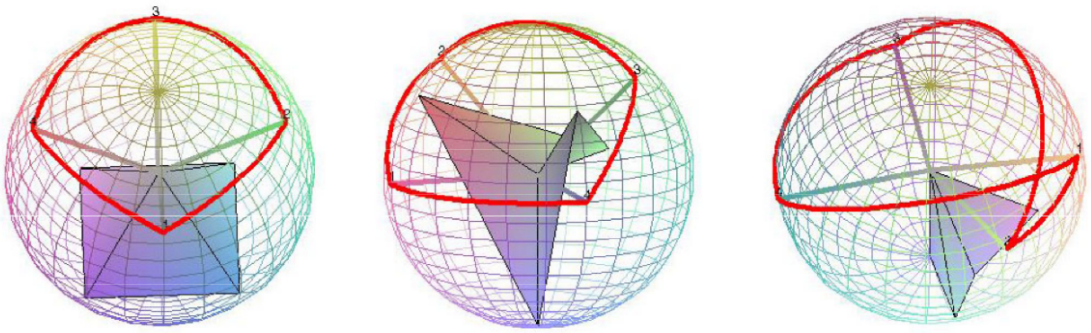
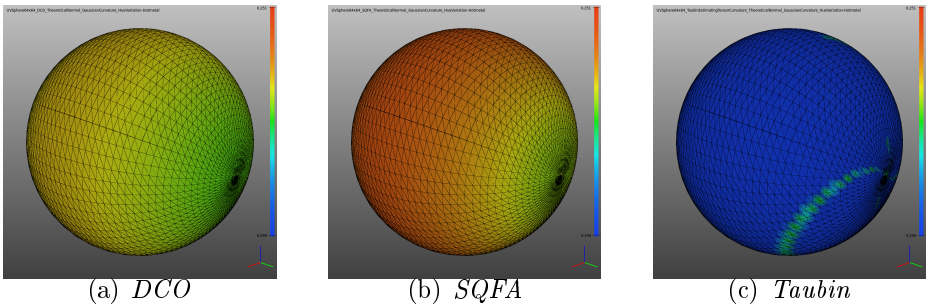


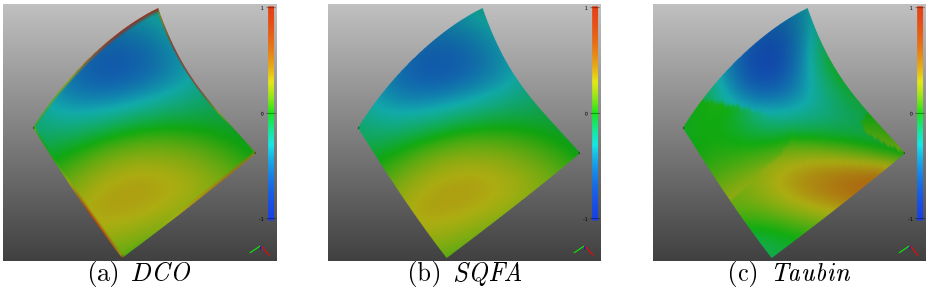
Figure 2.5 – Exemples de l'application de Gauss dans l'estimateur *DCO* (Illustration extraite de [BDM05]).



(a) *DCO* (b) *SQFA* (c) *Taubin*

(d) *Langer* (e) *ChenSchmitt*

FIGURE 2.6 – Estimation de la courbure gaussienne en utilisant la normale théorique sur une *UV-Sphère*. La courbure est mise en couleur sur une échelle en *HotMetal* sur l'intervalle $[0,249; 0,251]$. La valeur théorique de la courbure gaussienne est homogène sur l'ensemble de la sphère et est dans ce cas $0,25$ ce qui correspond à la couleur verte.



(a) *DCO* (b) *SQFA* (c) *Taubin*

(d) *Langer* (e) *ChenSchmitt*

FIGURE 2.7 – Estimation de la courbure gaussienne en utilisant la normale théorique sur la surface *Polynomiale cubique*. La courbure est mise en couleur sur une échelle en *HotMetal* sur l'intervalle $[-1; 1]$.

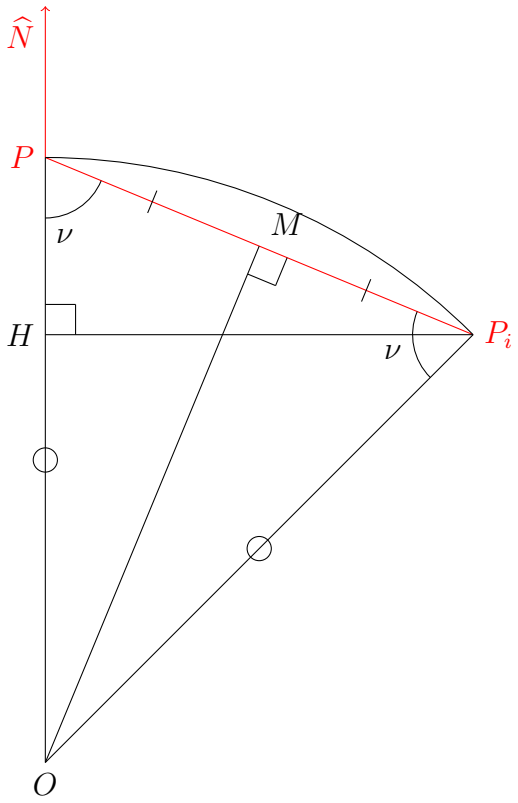


FIGURE 2.8 – Évaluation des courbures normales k_i par construction de cercles en utilisant P, P_i et $\widehat{N}$ (les éléments connus sont colorés en rouge et les éléments construits en noir).

2.3 La méthode proposée : *SineFitting* [CGD13] (régression sur sinusoïde)

La méthode *SineFitting* consiste à faire une régression dans le domaine de la dérivée seconde de la surface sur une fonction sinusoïdale de période π, résultante d'une transformation de l'équation d'Euler (Équation (1.8)).

Pour rappel, l'équation d'Euler (Équation (1.8)) donne la relation entre les courbures normales en P en fonction des valeurs de courbures maximale k_1 et minimale k_2 et de l'angle θ_i décrit entre leurs directions et la direction principale $\widehat{e_1}$. *SineFitting* évalue k_i, k_1, k_2 et θ_i à partir de P, $\{P_i\}$ et $\widehat{N}$. Dans un premier temps, nous allons voir comment nous avons choisi de faire l'évaluation d'un échantillonnage de k_i puis dans un second temps comment nous avons résolu le problème de l'inconnu θ_i.

2.3.1 Évaluation des courbures normales

L'évaluation des k_i se fait par construction de cercles en utilisant P, $\widehat{N}$ et un voisin P_i. Ces cercles ont pour but d'estimer la courbure normale de la surface dans le plan Π_i car la courbure est au signe près l'inverse du rayon du cercle osculateur (cf. Équation (1.7)). La Figure 2.8 en donne la construction.

Par construction géométrique de la Figure 1.18, on a les égalités suivantes :

$$\cos(\nu) = \frac{\|\overrightarrow{PH}\|}{\|\overrightarrow{P_iP}\|} = \frac{\|\overrightarrow{MP_i}\|}{\|\overrightarrow{P_iO}\|}.$$

Soit r_i le rayon de ce cercle, on a :

$$r_i = \|\overrightarrow{P_iO}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_iM}\| \cdot \|\overrightarrow{P_iP}\|}{\|\overrightarrow{PH}\|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\overrightarrow{P_iP}\|^2}{\|\overrightarrow{PH}\|}.$$

$$\text{Notons que : } \|\overrightarrow{PH}\| = \|\overrightarrow{P_iP}\| \cdot |\cos(\nu)| = \frac{|\overrightarrow{P_iP} \cdot \widehat{N}|}{||\widehat{N}||} = |\overrightarrow{P_iP} \cdot \widehat{N}|.$$

On obtient alors :

$$r_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{||\overrightarrow{P_iP}||^2}{|\overrightarrow{P_iP} \cdot \widehat{N}|}$$

et

$$k_i = \frac{2 \cdot (\overrightarrow{P_iP} \cdot \widehat{N})}{\|\overrightarrow{P_iP}\|^2}. \tag{2.39}$$

On retrouve l'équation d'estimation des k_i de la méthode *Taubin*.

2.3.2 Transformation de l'équation d'Euler

À cette étape, il reste les variables k_1, k_2 et θ_i à déterminer. Les valeurs de courbures principales sont des facteurs d'amplitude et leur moyenne définit l'axe d'oscillation d'une sinusoïde de période π. En effet l'équation d'Euler peut s'écrire sous la forme d'un cosinus :

$$k_i = (k_1 - k_2) \cdot \cos^2(\theta_i) + k_2 \text{ (cf. Preuve 1 page 144).} \tag{2.40}$$

De ce fait, k_1 et k_2 pourraient être déterminées si elles n'étaient pas liées à θ_i. Nous avons défini une nouvelle variable α_i comme suit :

$$\alpha_i = \measuredangle(\overrightarrow{t_0}, \overrightarrow{t_i}) \tag{2.41}$$

et une nouvelle variable inconnue qui en découle, ϕ l'angle orienté entre $\widehat{e_1}$ et $\widehat{t_0}$ (cf. Figure 2.10) :

$$\theta_i = \alpha_i + \phi. \tag{2.42}$$

Ainsi l'équation d'Euler se réécrit :

$$k_i = k_1 \cdot \cos^2(\alpha_i + \phi) + k_2 \cdot \sin^2(\alpha_i + \phi). \tag{2.43}$$

Comme on peut le voir dans la preuve 1 (page 144), cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$k_i = a \cdot \cos(2\alpha_i) + b \cdot \sin(2\alpha_i) + c \tag{2.44}$$

où a, b et c permettent de retrouver les variables k_1, k_2 et ϕ. Les valeurs k_i et α_i étant mesurables ou estimables, l'équation transformée (2.44) est solutionnable par la méthodes des moindres carrés avec un échantillonnage de trois voisins minimum. L'implémentation de cette méthode est donnée par l'Algorithme 1.

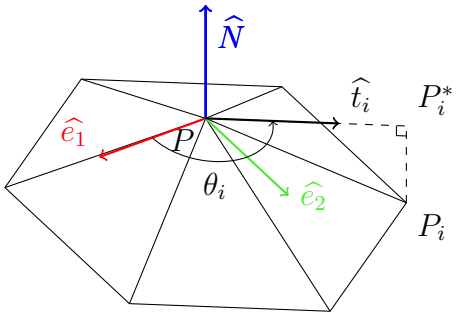


Figure 2.9 – Base orthonormée référentielle de l'équation d'Euler (Équation (1.8)) sur un voisinage discret.

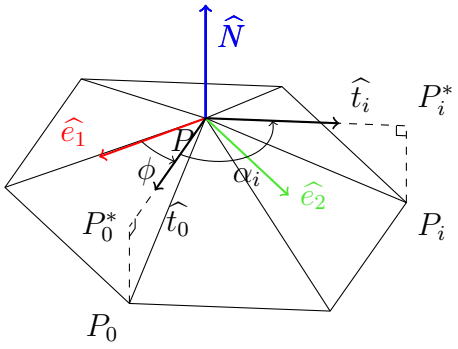


Figure 2.10 – Schéma de définition de α_i et ϕ.

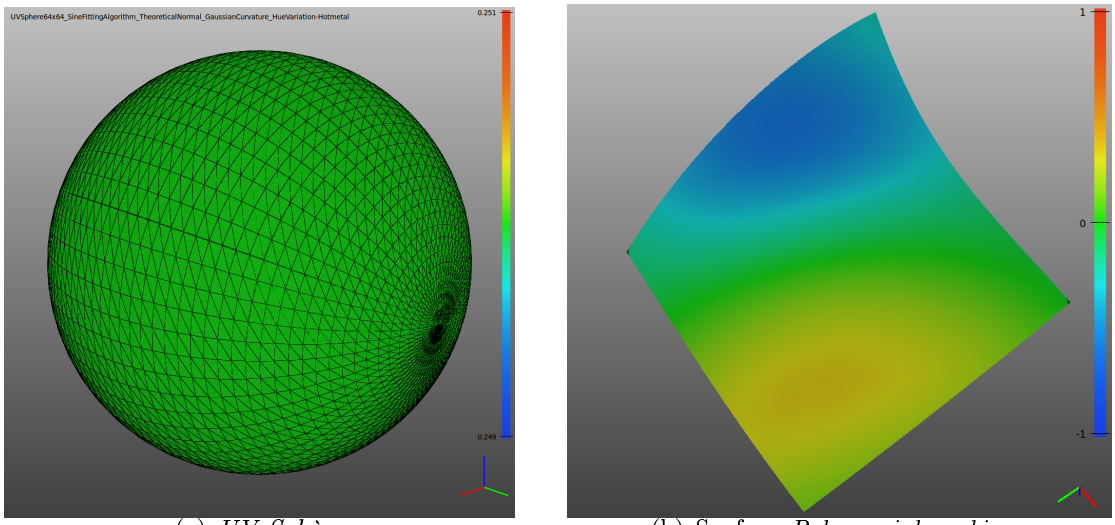
2.4 Discussion de la méthode

Au final, la nouvelle méthode proposée, *SineFitting*, peut-être vue comme une méthode hybride entre celle de Chen et Schmitt et celle de Taubin *et al.* dans la mesure où comme *ChenSchmitt*, *SineFitting* consiste à résoudre un système dans

Algorithme 1 Régression sur l'équation d'Euler transformée (Équation (2.44)).

fonction SINEFITTING(P, $\{P_i\}$, $\widehat{N}$, a, b, c)
  ****** Échantillonnage ******
    Soit τ le plan tangent en P avec la normale $\widehat{N}$
    pour tout $i \in [0, 1, ..., m-1]$ **faire**
      $P_i^* \leftarrow$ projection de P_i sur τ
      $\vec{T_i} \leftarrow \frac{P\vec{P}_i^*}{\|P\vec{P}_i^*\|}$
      si $(i = 0)$ **alors**
        $\alpha_i \leftarrow 0$
      sinon
        $$\alpha_i \leftarrow \begin{cases} \arccos(\vec{T_0} \cdot \vec{T_i}) & \text{si } (\langle \widehat{T_0}, \widehat{T_i} \rangle \cdot \widehat{N} > 0) \\ 2 \cdot \pi - \arccos(\vec{T_0} \cdot \vec{T_i}) & \text{sinon} \end{cases} \quad \triangleright\ \alpha_i = \measuredangle(\vec{T_0}, \vec{T_i})$$
      fin si
      $k_i \leftarrow 2 \cdot \frac{\vec{P_iP} \cdot \widehat{N}}{\|\vec{P_iP}\|^2}$ ▷ estimation des courbures normales pour chaque $\overrightarrow{P_iP}$ suivant l'Équation 2.39
    fin pour
  ****** Régression ******
    Régression par la méthode des moindres carrés sur l'Équation 2.44 pour estimer a, b et c tels que
    $$\begin{pmatrix} \cos(2\cdot\alpha_0) & \sin(2\cdot\alpha_0) & 1 \\ \cos(2\cdot\alpha_1) & \sin(2\cdot\alpha_1) & 1 \\ \cos(2\cdot\alpha_2) & \sin(2\cdot\alpha_2) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(2\cdot\alpha_{m-1}) & \sin(2\cdot\alpha_{m-1}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_{m-1} \end{pmatrix}$$
fin fonction Calcul des valeurs k_1, k_2 et ϕ à partir de a, b et c cf. Preuve 1 page 144

le domaine de la dérivée seconde de la surface en utilisant l'équation d'Euler mais avec un échantillonnage par sections normales comme le font Taubin *et al.*. On obtient alors une méthode qui allie la stabilité, due à la régression sur l'équation d'Euler contrairement à une approche en *ACP*, à la précision, due à l'évaluation des courbures normales plus précise et plus stable que celle de *ChenSchmitt*. La méthode d'échantillonnage utilisée par *SineFitting* est plus fixe que celle utilisée par *ChenSchmitt* car cette dernière requiert le choix d'un sous-ensemble des triplets possibles. En reprenant des maillages de l'*UV-Sphère* et de la surface *Polynomiale cubique* vus précédemment (cf. Figures 2.6 et 2.7), on obtient un estimateur qui donne des résultats corrects sur les deux contrairement aux estimateurs de l'état de l'art (cf. Figure 2.11). Toutefois le *SineFitting* utilise directement la normale pour estimer les courbures normales, ce qui fait qu'elle reste sensible à l'estimation de celle-ci. Même si elle l'est moins que les approches en *ACP* sur des voisinages équilibrés car la sinusoïde contraint une symétrie des courbures normales autour du point d'analyse. Cette sensibilité nous a incité à refaire un comparatif sur les estimateurs de normale pour déterminer celui qui serait le plus fiable et précis.



(a) *UV-Sphère* (b) Surface *Polynomiale cubique*

Figure 2.11 – Estimation de la courbure gaussienne en utilisant la normale théorique avec la méthode *SineFitting*. La courbure est mise en couleur sur une échelle en *HotMetal* sur l'intervalle $[0,249; 0,251]$ pour la sphère (La valeur théorique de la courbure gaussienne est homogène sur l'ensemble de la sphère et est dans ce cas $0,25$ ce qui correspond à la couleur verte) et sur l'intervalle $[-1; 1]$ pour la surface *Polynomiale cubique*

Chapitre 3

Normale

Les normales aux sommets sont importantes pour la compréhension de la géométrie d'une surface. Les normales ont diverses utilités comme par exemple :

- la reconstruction de la surface comme dans les algorithmes suivants *BPA* [BMR+99], *Poisson* [KBH06], *Delaunay* [NMdOT01], [DGH01], *Voronoï* [ACSTD07] [ABK98] et *Power Crust* [ACK01],
- le rendu de surface [JDZ04, YHJ+14, HW10, KK05],
- l'estimation de la courbure pour de nombreuses méthodes comme celles vues dans le Chapitre 2 : *SQFA*, *ChenSchmitt*, *Taubin*, *Langer*, *DCO* et *SineFitting*. L'estimation de la normale est la première étape de calcul pour ces estimateurs de courbure. Elle influence fortement ces derniers, c'est pourquoi nous les avons étudiés, évalués et classés dans différentes catégories.

Les diverses utilisations de la normale donnent lieu à différentes attentes sur le résultat de son estimation. Prenons l'exemple des crêtes et des crevasses, ou plus globalement des points de discontinuité de surface.

Si on s'intéresse à la reconstruction de surface ou à son rendu, alors on cherche à estimer les normales de façon à faire ressortir ces points de discontinuité. Ainsi par exemple, la méthode de calcul de normale *NENR* ([CRR07]) accentue les discontinuités (cf. Figure 3.1 (c)) pour reconstruire plus fidèlement une surface à partir d'un nuage de points. Par opposition, la méthode *NE-Hoppe* (cf. Figure 3.1(b)) réduit les discontinuités pour obtenir un lissage de la surface reconstruite. Sur la Figure 3.2, on peut voir l'impact de l'accentuation ou de la réduction de la discontinuité sur le rendu d'une surface. Sur les Figures 3.2 (a) et (b), la surface rendue est composée d'un pavé et sur les Figures 3.2 (c) et (d), la surface rendue est composée d'un cylindre. On s'intéresse à la discontinuité sur une arête vive du pavé (voir principalement l'arête vue de face) : la Figure 3.2 (a) contient l'accentuation de la discontinuité, la Figure 3.2 (b) représente le lissage. Sur les Figures 3.2 (c) et (d), on s'intéresse à la discontinuité sur les arêtes vives entre la surface latérale et les bases du cylindre : la Figure 3.2 (c) contient l'accentuation de la discontinuité, la Figure 3.2 (d) représente le lissage des arêtes vives.

Cependant, si on cherche à mesurer la courbure locale alors nous allons nous intéresser uniquement aux estimateurs de normale qui forcent l'évaluation de la surface comme étant continue aux points d'analyse.

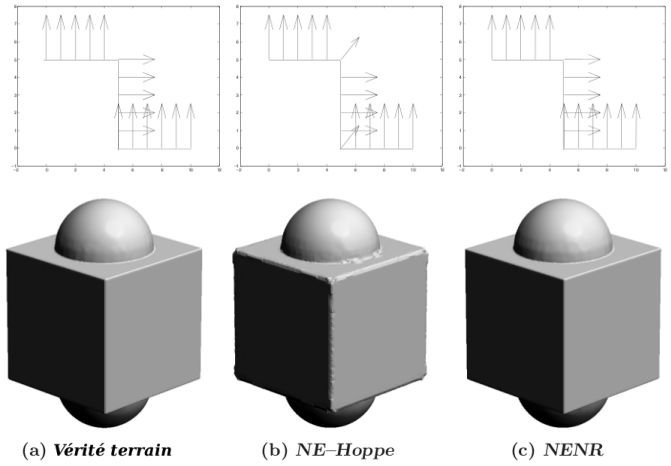
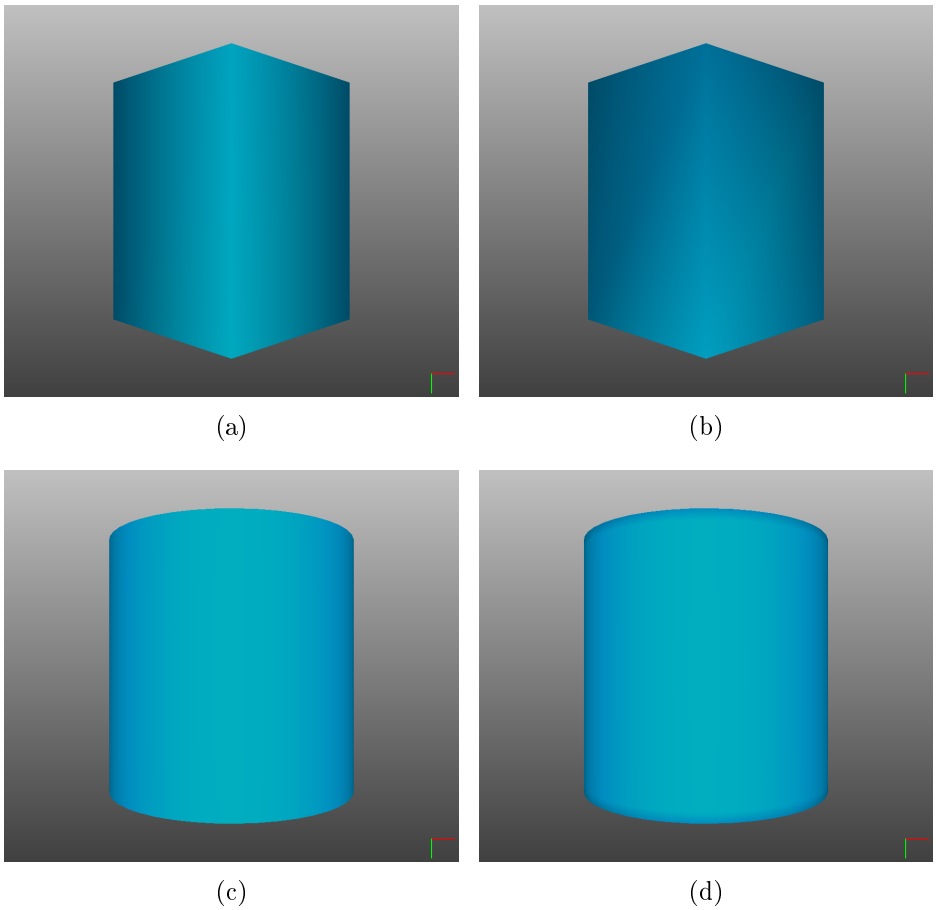


FIGURE 3.1 – *NENR* : Schémas d'orientation des normales et exemples de reconstruction avec les différentes estimations de normales (Images issues de [CRR07]).

3.1 Méthodes existantes

Les méthodes existantes peuvent être classées selon deux approches : les méthodes discrètes et les méthodes d'optimisation. Les méthodes discrètes utilisent directement les informations de la géométrie du maillage alors que les méthodes d'optimisation cherchent à ajuster un modèle théorique sur les données réelles. Toutefois, il existe des méthodes qui utilisent les deux approches. Nous les qualifierons d'hybrides. Afin de faire un comparatif, nous avons sélectionné des représentants de chaque catégorie.

Nous avons sélectionné la méthode *AreaWeighted* comme représentante des méthodes discrètes et les méthodes *PlaneFitting* et *ExtendedQuadricFitting* pour les méthodes d'optimisation. Celles-ci sont extraites de [KAWB09] qui fait une comparaison d'un ensemble de méthodes d'estimation de normale en terme de temps de calcul et de précision. De plus, elles se retrouvent comme première étape de calcul de courbure dans de nombreuses publications comme par exemple [GS03], [DMSB02] et [MW00]. Enfin nous avons ajouté la méthode d'estimation de normale *ChenSchmitt* qui est une méthode hybride entre les deux approches et qui est la première étape de l'estimateur de courbure du même nom, issue de [CS92].



(a) (b)

(c) (d)

Figure 3.2 – Rendu d'arêtes vives en variant les normales des faces adjacentes. (a) et (c) le rendu avec normales réelles. (b) et (d) le rendu avec normales estimimées par la moyenne des normales des faces voisines.

3.1.1 *AreaWeighted* (pondération par les aires des faces adjacentes)

Pour calculer la normale d'une facette triangulaire d'un maillage, il suffit de faire le produit vectoriel de deux vecteurs formés par deux côtés de celle-ci ordonnés dans le sens trigonométrique, puis de normaliser le résultat. Les normales des facettes du maillage pointent vers l'extérieur de l'objet. Par exemple, la normale de la facette F_0 (P, P_0, P_1) : $\widehat{N_{F_0}}$ de la Figure 3.3 a pour équation :

$$\widehat{N_{F_0}} = (\overrightarrow{PP_0} \wedge \overrightarrow{PP_1})_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}}. \tag{3.1}$$

La méthode la plus simple pour estimer la normale au sommet d'un maillage est de faire la moyenne des normales des faces voisines du sommet analysé. Par exemple,

un sommet P ayant m voisins et de normale $\widehat{N}$ en P a pour équation :

$$\widehat{N} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \widehat{N_{F_i}}}{m}. \tag{3.2}$$

Cette méthode ne prend pas en compte la répartition spatiale du voisinage ni la taille des facettes voisines. La méthode *AreaWeighted* est basée sur le même principe mais ajoute une pondération dans la moyenne des normales de faces voisines. Chaque normale est pondérée par l'aire de sa facette. La formule de $\widehat{N}$ en un voisinage de valence m devient alors :

$$\widehat{N} = \left(\sum_{i=0}^{m-1} (\widehat{N_{F_i}} \cdot aire(PP_iP_{((i+1) \pmod m)})) \right)_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}}. \tag{3.3}$$

Parmi les autres méthodes de pondération des normales aux faces, il en existe une qui pondère par les angles en P de chaque facette. Cependant cette méthode, également présentée dans le comparatif [KAWB09], donne de moins bons résultats que *AreaWeighted*.

La complexité de la méthode *AreaWeighted* est $O(m)$ où m est le nombre de voisins.

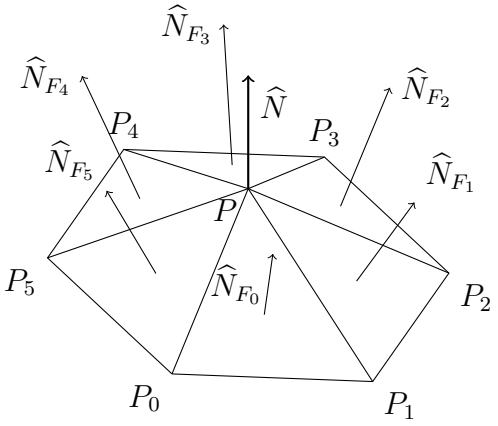


FIGURE 3.3 – Voisinage au premier cercle d'un sommet de valence 6 avec les normales aux faces.

3.1.2 *PlaneFitting* (régression sur un plan)

Le but de cette méthode est de trouver l'équation du plan tangent en P (cf. Figure 3.4), ou du moins un plan parallèle au plan tangent, par régression d'un ensemble de points constitué de P et de son voisinage $\{P_i\}$. L'équation du plan recherché est de la forme (3.4).

$$0 = n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + d \tag{3.4}$$

Trouver ce plan revient à résoudre un système qui, pour un voisinage de taille m, est de la forme (3.5) :

$$\min_{\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{pmatrix}} \left\| \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z & 1 \\ P_{1_x} & P_{1_y} & P_{1_z} & 1 \\ P_{2_x} & P_{2_y} & P_{2_z} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ P_{(m-1)_x} & P_{(m-1)_y} & P_{(m-1)_z} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{pmatrix} \right\|. \tag{3.5}$$

Cette minimisation peut se faire, comme pour toutes les minimisations des méthodes vues par la suite, par la méthode de décomposition en valeurs singulières : *SVD* ($U\Sigma V^T$ [Man82]).

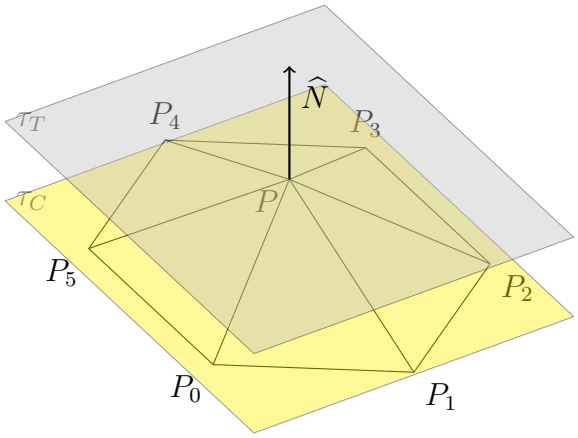


FIGURE 3.4 – Schéma d'ajustement d'un plan sur un voisinage donné.

Cette méthode est utilisable sur un nuage de points et sa complexité de calcul est d'ordre $O(m^2)$ où m est le nombre de voisins.

3.1.3 *ExtendedQuadricFitting* (régression sur quadrique étendue)

Les méthodes de régression sur quadrique sont les méthodes les plus communément utilisées. Comme illustré à la Figure 3.5, elles consistent à modéliser la surface locale sous-jacente du maillage par une fonction quadratique. La méthode que nous avons retenue est celle décrite dans [MV97], puis reprise dans les études comparatives [Pet02], [GS03] (appelée dans celui-ci *Extended Quadric Fitting*) et [KAWB09] (où elle est appelée *QuadTransSVD*). Elle consiste à résoudre l'équation (3.6) :

$$z' = a \cdot x'^2 + b \cdot y'^2 + c \cdot x' \cdot y' + d \cdot x' + e \cdot y' \tag{3.6}$$

où le triplet $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ est obtenu pour chaque voisin par un changement de repère. Cette méthode suit le procédé ci-dessous.

1. Première estimation de la normale : si aucune pré-estimation de la normale n'est donnée, on peut estimer une normale initiale, soit par simple moyenne (ou moyenne pondérée) des normales voisines, soit par régression sur un plan (cf. méthodes précédentes).
2. Calcul de la matrice de changement de repère qui passe du repère global à un repère orthonormé local, centré en P, qui a pour vecteur unitaire sur z la normale estimée. Cette matrice est de la forme $R_{3,3} = [\widehat{r_1}, \widehat{r_2}, \widehat{r_3}]^T$ où les vecteurs $\widehat{r_1}$, $\widehat{r_2}$ et $\widehat{r_3}$ sont définis par l'équation (3.7).

$$\text{Soient le vecteur } \widehat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et la matrice } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{on a :}$$

$$\widehat{r_1} = \left((I_3 - \widehat{N} \cdot \widehat{N}^T) \cdot \widehat{i} \right)_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}}, \qquad \widehat{r_3} = \widehat{N}, \qquad \widehat{r_2} = \widehat{r_3} \wedge \widehat{r_1}. \quad (3.7)$$

3. Résolution du système : pour chaque voisin $P_i \in \{P_i\}$, de coordonnées dans le repère global (x_i, y_i, z_i), les coordonnées dans le repère local (x'_i, y'_i, z'_i) sont données par (3.8).

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = R_{3,3} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Pour un voisinage de taille m, on résout le système (3.9) par la méthode des moindres carrés.

$$\begin{pmatrix} x'^2_0 & y'^2_0 & x'_0 \cdot y'_0 & x'_0 & y'_0 \\ x'^2_1 & y'^2_1 & x'_1 \cdot y'_1 & x'_1 & y'_1 \\ x'^2_2 & y'^2_2 & x'_2 \cdot y'_2 & x'_2 & y'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x'^2_{(m-1)} & y'^2_{(m-1)} & x'_{(m-1)} \cdot y'_{(m-1)} & x'_{(m-1)} & y'_{(m-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_0 \\ z'_1 \\ z'_2 \\ \cdots \\ z'_{(m-1)} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

4. Lecture des valeurs de la normale : après résolution du système, on obtient les valeurs a, b, c, d et e. La nouvelle normale estimée répond à l'équation (3.10).

$$\widehat{N} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \\ 1 \end{pmatrix}_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}}. \quad (3.10)$$

Cette méthode est utilisable sur un nuage de points et sa complexité de calcul est d'ordre $O(m^2)$ où m est le nombre de voisins.

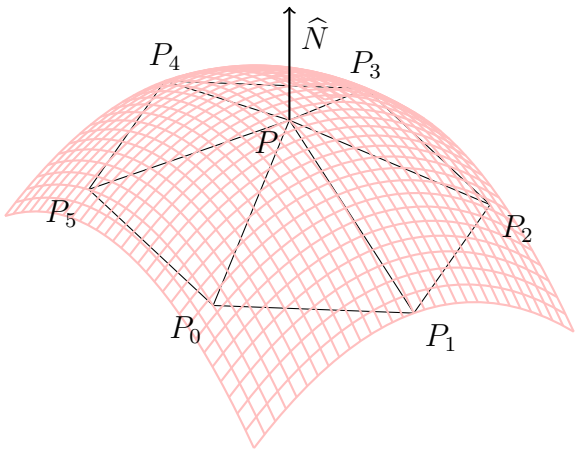


FIGURE 3.5 – Schéma d'ajustement d'une quadrique sur un voisinage donné.

3.1.4 *ChenSchmitt*

Le calcul de la normale par la méthode *ChenSchmitt* [CS92] est basé sur le Théorème de Meusnier 1.2 qui dit que toute section de plan avec la surface passant par le sommet P a pour tangente un vecteur contenu dans le plan tangent de la surface au sommet P (cf. Figure 2.4(a) page 35). Cette méthode consiste à construire des cercles entre des triplets de sommets constitués de P et de deux voisins distincts dans $\{P_i\}$. Par exemple la Figure 2.4(a) donne le cercle calculé à partir du triplet $\{P_0, P, P_2\}$ et le vecteur tangent $\widehat{t}$ de ce cercle en P. Les Figures 2.4(b) et 2.4(c) donnent respectivement l'ensemble des cercles circonscrits et les tangentes en résultant.

Le détail de la méthode est le suivant :

1. Construction de l'ensemble des triplets possibles (P_a, P, P_b) appelé $\{T_i\}$ tels que (P_a, P, P_b) et (P_b, P, P_a) sont considérés comme identiques et $a \neq b$. Sur chacun de ces triplets, on calcule un coefficient w tel que $w = \langle \overrightarrow{P_aP}, \overrightarrow{PP_b} \rangle$. Ce coefficient correspond à un coefficient d'opposition entre les deux vecteurs du triplet.
2. Sélection d'un sous-ensemble des triplets noté $\{T'_i\}$: les triplets sont triés par ordre décroissant sur w. Puis la méthode préconise de n'en garder que les m premiers, m étant le nombre de voisins de P. Ainsi on a $|\{T'_i\}| = |\{P_i\}|$.
3. Approximation des normales des sections des plans avec la surface en P construites à partir des triplets de $\{T'_i\}$: pour tout i, on calcule le centre O_i du cercle circonscrit au triangle formé par les sommets de $T'_i \in \{T'_i\}$. Soit $\widehat{n_i} = \overrightarrow{PO_i}\frac{\bullet}{\|\bullet\|}$, $\widehat{n_i}$ est une estimation de la normale en P, de la courbe d'intersection du plan passant par les sommets de T'_i avec la surface (cf. Figure 2.4(a)).
4. Approximations des tangentes des sections de plans avec la surface construite à partir des triplets de $\{T'_i\}$: les tangentes sont obtenues selon l'équation (3.11).

$$\widehat{t_i} = \widehat{n_i} \wedge (\overrightarrow{P_a P} \wedge \overrightarrow{P P_b})_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}}. \tag{3.11}$$

5. Calcul de la normale à partir des tangentes construites $\{\widehat{t_i}\}$: soit $\{\widehat{N_{ab}}\}$ l'ensemble des vecteurs $\widehat{N_{ab}} = \widehat{t_a} \wedge \widehat{t_b}$ où $(\widehat{t_a}, \widehat{t_b}) \in \{\widehat{t_i}\}^2$, $a \neq b$ et $\langle \widehat{N}, \widehat{N_{ab}} \rangle > 0$, on calcule alors la normale $\widehat{N}$ suivant l'équation (3.12).

$$\widehat{N} = \left(\sum_{\widehat{N_{ab}} \in \{\widehat{N_{ab}}\}} \widehat{N_{ab}} \right)_{\frac{\bullet}{\|\bullet\|}}. \tag{3.12}$$

Cette méthode est utilisable sur un nuage de points. Sa complexité se caractérise par un arrangement, un tri et une régression. Soit m la taille du voisinage de P, la complexité de construction d'un arrangement est $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$ où k correspond au k-uplet de l'arrangement. Dans ce cas k vaut 2. La complexité d'un tri sur un ensemble de n éléments est en $O(n \cdot log(n))$. Enfin, l'algorithme consiste à prendre m éléments de l'ensemble trié pour faire une régression par la méthode des moindres carrés qui est de l'ordre de $O(m^2)$. Cela donne une complexité finale de :

$$O(A_m^2 \cdot log(A_m^2) + m^2) \approx O(m^2 \cdot log(m)). \tag{3.13}$$

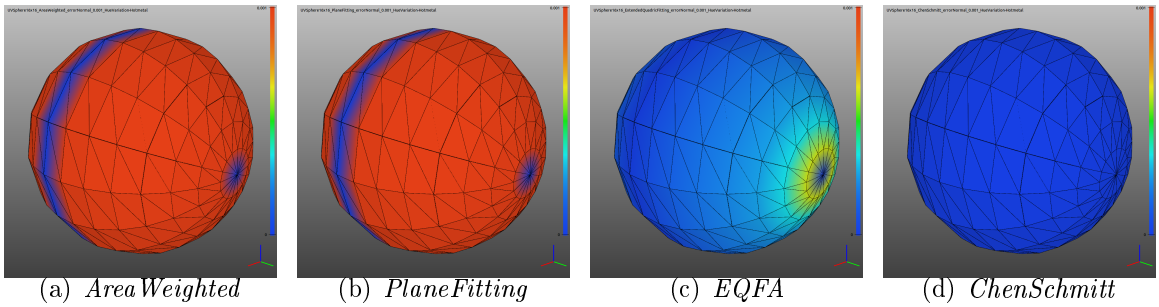
3.2 Éléments de comparaison

Klasing *et al.* dans [KAWB09] donnent une comparaison en terme de temps et de précision sur les estimateurs *AreaWeighted*, *PlaneFitting* et *ExtendedQuadricFitting* de laquelle il ressort que les méthodes *AreaWeighted* et *PlaneFitting* sont les plus rapides et les plus précises. Dans notre cas, nous souhaitons faire un comparatif analogue à celui que l'on a fait sur les estimateurs de courbure, c'est à dire en fonction des critères définis dans la section 1.4. Pour faire notre comparatif, nous introduisons le descripteur suivant :

Définition 3.1 (Erreur de la normale estimée) *L'erreur de la normale estimée est la différence entre la normale estimée $\overrightarrow{N_C}$ et la théorique $\overrightarrow{N_T}$. Elle est calculée comme suit :*

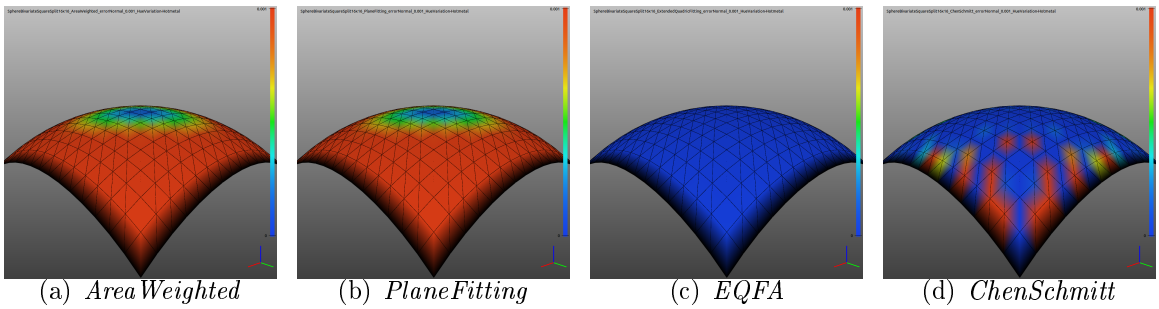
$$Error = \|\overrightarrow{N_C} - \overrightarrow{N_T}\|. \tag{3.14}$$

Cette quantification de l'erreur permet de comparer les estimateurs de normale entre eux. Les Figures 3.6 et 3.7 donnent les résultats de ces estimateurs sur une même surface analytique, celle d'une sphère de diamètre 2, mais discrétisée avec deux différentes méthodes. La Figure 3.6 donne une sphère discrétisée sous forme d'*UV-Sphère* alors que la Figure 3.7 donne une discrétisation d'une partie de surface par projection d'une grille sur la surface (la méthode *SplitSquare*). On peut constater que pour une même surface dont tous les points ont les mêmes propriétés géométriques, aucun des estimateurs sélectionnés n'est stable à la répartition du voisinage.



(a) *AreaWeighted* (b) *PlaneFitting* (c) *EQFA* (d) *ChenSchmitt*

FIGURE 3.6 – Erreur d'estimation de la normale sur une *UV-Sphère* (échelle de couleur *HotMetal* sur l'intervalle $[0; 0,001]$).



(a) *AreaWeighted* (b) *PlaneFitting* (c) *EQFA* (d) *ChenSchmitt*

FIGURE 3.7 – Erreur d'estimation de la normale sur une partie de surface d'une sphère discrétisée par la projection d'une grille (la méthode *SplitSquare*) (échelle de couleur *HotMetal* sur l'intervalle $[0; 0,001]$).

3.3 La méthode proposée : *ExtendedSineFitting* (régression sur sinusoïde étendue)

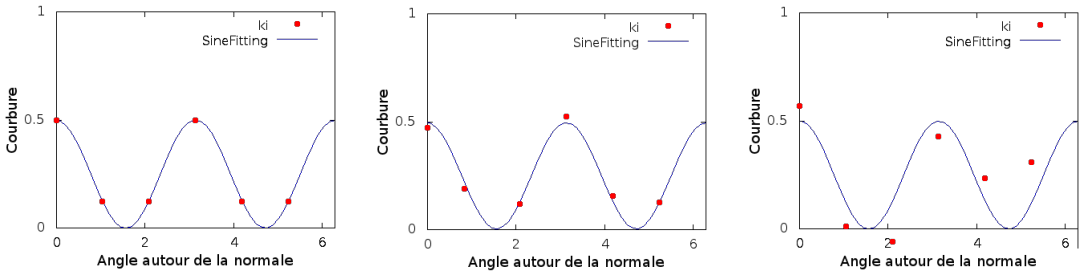
La méthode *ExtendedSineFitting* (ou de régression d'une sinusoïde étendue) comme son nom l'indique, est une méthode basée sur l'estimateur de courbure *SineFitting*. Plus exactement, l'*ExtendedSineFitting* mesure l'erreur de la méthode *SineFitting* due à une mauvaise estimation de la normale afin de la corriger.

3.3.1 Principe de fonctionnement

Soit P un sommet d'une surface S et $\widehat{N}$ la normale de cette surface en ce sommet. Le *SineFitting*, présenté dans le Chapitre 2 Section 2.3, est un estimateur de courbure basé sur l'évaluation d'un ensemble de courbures normales $\{k_i\}$ en un sommet P. Ces k_i sont obtenus par construction de cercles $\mathcal{C}_i$, entre P et chacun des $\{P_i\}$ en utilisant $\widehat{N}$ (cf. Figure 2.8 page 39) : $k_i = \frac{1}{r_i}$ où r_i est le rayon de $\mathcal{C}_i$. Ces $\mathcal{C}_i$ approximent les courbes d'intersection entre S et ses plans normaux Π_i en P. Les k_i servent à résoudre l'équation d'Euler transformée (cf. Équation (2.44) page 41) qui permet de retrouver

les valeurs de courbures moyenne k_H, gaussienne k_G, maximale k_1 et minimale k_2 et les directions principales $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$. De par leur construction, les $\mathcal{C}_i$ sont calculés en fonction de $\widehat{N}$, ce qui implique que cette méthode est sensible à l'estimation de $\widehat{N}$. Par exemple, la Figure 3.8 donne l'évaluation des courbures normales k_i en un sommet P appartenant à la surface S (illustrée sur la Figure 4.1) et représentant une sinusoïde. L'évaluation des k_i est supportée par un voisinage régulier comme défini par [GS03] avec trois normales différentes : Figure 3.8(a) normale théorique (calculée à partir de la surface analytique), Figure 3.8(b) normale légèrement erronée (estimée avec la méthode *AreaWeighted*) et Figure 3.8(c) normale fortement erronée (estimée avec la méthode *ChenSchmitt*). Les valeurs estimées des k_i sont représentées par des points rouges. On peut remarquer que ces points appartiennent à la sinusoïde sur la Figure 3.8(a) car calculés avec la normale théorique. Par contre, dès que l'évaluation est faite à partir d'une normale erronée, ces points sont décalés (cf. Figures 3.8 (b) (c)).

Pour pallier ce problème nous corrigeons la normale en modélisant l'impact de son erreur sur l'estimation des k_i.



(a) Normale théorique (calculée à partir de la surface analytique).

(b) Normale légèrement erronée (estimée par la méthode *AreaWeighted*).

(c) Normale fortement erronée (estimée par la méthode *ChenSchmitt*).

FIGURE 3.8 – Variation de l'évaluation des k_i suivant la normale utilisée.

Pour éclaircir la suite de la lecture, nous définissons la liste des notations suivante (illustrée à la Figure 3.9) :

- Les noms qui ont pour indice $_T$ correspondent à la donnée théorique et ceux qui ont un $_C$ comme indice correspondent à la donnée calculée.
- $\widehat{N_T}$ et $\widehat{N_C}$ sont respectivement la normale théorique et la normale calculée en P.
- ψ correspond à l'angle orienté $\angle(\widehat{N_C}, \widehat{N_T})$.
- $\overrightarrow{V_\#} = \widehat{N_T} - \widehat{N_C}$.
- $\Pi_\#$ est le plan normal contenant $\widehat{N_T}$ et $\widehat{N_C}$.
- $\overrightarrow{V_\#^*}$ désigne la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_\#}$ sur le plan tangent τ_C. $\overrightarrow{V_\#^*}$ satisfait l'équation suivante :

$$\widehat{N_T} = \cos(\psi) \cdot \widehat{N_C} + \overrightarrow{V_\#^*}. \tag{3.15}$$

$\overrightarrow{V_\#^*}$ est directement lié à ψ car il répond également à l'équation :

$$\|\overrightarrow{V_\#^*}\| = \sin(\psi). \tag{3.16}$$

Il permet de ce fait d'illustrer l'impact de ψ, l'angle entre la normale théorique et la normale calculée, dans les autres plans normaux $\{\Pi_i\}$.

- θ_i' est l'angle orienté dans le sens direct entre $\overrightarrow{V_\#^*}$ appartenant à τ_C et les autres tangentes $\{\widehat{t_{C_i}}\}$ en P dans le plan tangent τ_C.
- ν_i est l'angle $\angle(\overrightarrow{P_iP}, -\widehat{N})$.

Si $\widehat{N_C} \neq \widehat{N_T}$ alors $\widehat{N_C}$ est erronée et il existe un angle entre $\widehat{N_C}$ et $\widehat{N_T}$ et un vecteur de correction, respectivement ψ et $\overrightarrow{V_\#}$. Cette erreur entre $\widehat{N_C}$ et $\widehat{N_T}$ a deux répercussions. La première que nous allons voir en détail est montrée par la Figure 3.8 et correspond à une évaluation erronée des k_i. La seconde, qui sera traitée dans un deuxième temps, est la déformation angulaire due à l'angle dièdre entre le plan tangent théorique et le plan tangent calculé (τ_T et τ_C).

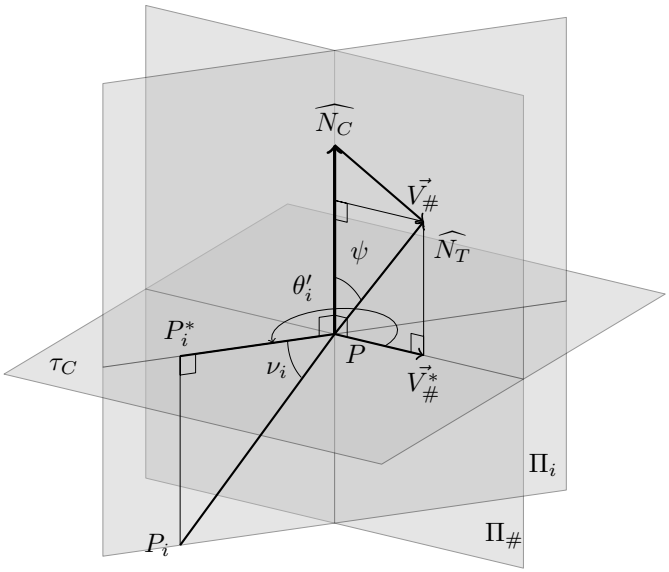


Figure 3.9 – Schéma de l'erreur entre $\widehat{N_T}$ et $\widehat{N_C}$.

Évaluation de l'erreur de $\widehat{N_C}$ en fonction des évaluation des k_i

Pour rappel :

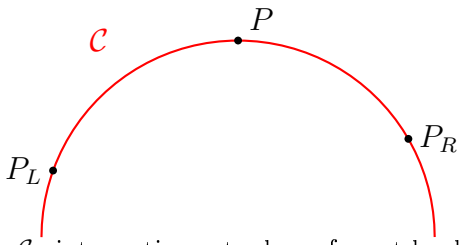
$$k_i = \frac{2 \cdot (\overrightarrow{P_iP} \cdot \widehat{N})}{\|\overrightarrow{P_iP}\|^2} = \frac{2 \cdot \cos(\nu_i)}{\|\overrightarrow{P_iP}\|}. \tag{3.17}$$

Pour observer l'impact de l'erreur de l'estimation de la normale sur l'estimation des k_i, considérons la configuration idéale donnée par la Figure 3.10(a). Dans cette

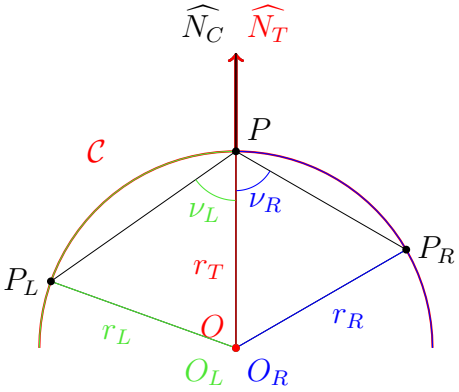
configuration, il y a, dans le plan normal Π à S en P, un voisin à droite et à gauche de P, appelés respectivement P_R et P_L. Le segment curviligne $\mathcal{C}$ entre P_R et P_L, résultant de l'intersection entre Π et S, correspond à un arc de cercle.

On définit le coefficient de symétrie Δ_{LR} tel que :

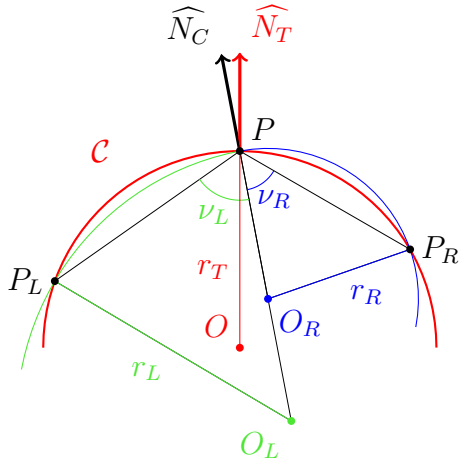
$$\Delta_{LR} = \frac{k_R}{k_L} = \frac{\|\vec{P_L P}\| \cdot \cos(\nu_R)}{\|\vec{P_R P}\| \cdot \cos(\nu_L)}. \tag{3.18}$$



(a) Courbe $\mathcal{C}$: intersection entre la surface et le plan Π.



(b) $\psi = 0$



(c) $\psi \neq 0$

FIGURE 3.10 – Évaluation des k_i dans un même plan à droite et à gauche dans un contexte idéal (a) avec une normale $\widehat{N_C}$ exacte (b) ou une normale $\widehat{N_C}$ erronée (c).

Dans ce contexte, $\widehat{N_T}$ est la normale du cercle de centre O passant par les sommets P, P_R et P_L (dessiné en rouge dans la Figure 3.10).

Si l'angle ψ est nul alors les cercles calculés à droite et à gauche par l'équation (3.17) nous donnent des courbures normales identiques comme dans la Figure 3.10(b). Nous avons $k_L = k_R$ et $\Delta_{LR} = 1$.

Par contre, si l'angle ψ est non-nul, alors les calculs des rayons des cercles à droite et gauche de P ne sont plus équivalents (cf Figure 3.10(c)). L'angle ψ est soustrait

à ν_R et ajouté à ν_L. Soient $\nu_{R_{Err}}$ et $\nu_{L_{Err}}$:

$$\nu_{L_{Err}} = \nu_L + \psi, \tag{3.19}$$

$$\nu_{R_{Err}} = \nu_R - \psi. \tag{3.20}$$

$\nu_{R_{Err}}$ et $\nu_{L_{Err}}$ appartiennent à $]0;\pi[$, car sinon il y aurait une inversion du sens de la normale.

$$\Delta_{LR_{Err}} = \frac{\|\vec{P_L P}\| \cdot \cos(\nu_{R_{Err}})}{\|\vec{P_R P}\| \cdot \cos(\nu_{L_{Err}})} = \frac{\|\vec{P_L P}\| \cdot \cos(\nu_R - \psi)}{\|\vec{P_R P}\| \cdot \cos(\nu_L + \psi)} > 1 \tag{3.21}$$

Le coefficient de symétrie $\Delta_{LR_{Err}}$ est supérieur à 1 car la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, ce qui fait que la courbure à droite est sur-évaluée alors que la courbure à gauche est sous-évaluée. Notons que le sens de la normale définit le côté sur-estimé et le côté sous-estimé. Cependant les erreurs des estimations des courbure normales ne sont pas linéairement proportionnelles car elles dépendent à la fois des distances $\|\overrightarrow{P_L P}\|$ et $\|\overrightarrow{P_R P}\|$ et de la fonction cosinus qui n'est pas linéaire. Le coefficient de symétrie $\Delta_{LR_{Err}}$ dépend de ψ. On approxime l'erreur d'estimation de la courbure normale comme suit :

$$\Delta_{LR_{Err}} \approx \lambda \cdot \sin(\psi) \tag{3.22}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un coefficient multiplicateur résultant de la simplification sous la forme linéaire.

L'erreur d'estimation de la normale a aussi un impact dans les autres Π_i. En conséquence, il faut évaluer son comportement autour de $\widehat{N_C}$. L'influence de ψ sur un plan normal Π_i est résultante de sa projection orthogonale sur celui-ci. Comme on a $\|\overrightarrow{V_\#^*}\| = \sin(\psi)$, la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_\#^*}$ sur Π_i illustre l'impact de ψ. La Figure 3.11 donne trois exemples de projections des vecteurs $\overrightarrow{V_\#^*}$ et $\widehat{N_T}$. Les vecteurs $\overrightarrow{V_{\#_1}^{**}}$, $\overrightarrow{V_{\#_2}^{**}}$ et $\overrightarrow{V_{\#_3}^{**}}$ projections de $\overrightarrow{V_\#^*}$ respectivement sur Π_1, Π_2 et Π_3, vérifient alors l'équation :

$$\|\overrightarrow{V_{\#_i}^{**}}\| = \|\overrightarrow{V_\#^*}\| \cdot \cos(\theta_i'). \tag{3.23}$$

Au final, si l'on considère que le coefficient de symétrie $\Delta_{LR_{Err}}$ est proportionnel à $\|\overrightarrow{V_{\#_i}^{**}}\|$, la fonction $E(\theta_i')$ de l'erreur d'évaluation des courbures normales k_i est une fonction de la forme :

$$E(\theta_i') \approx \lambda \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\theta_i'). \tag{3.24}$$

Évaluation de l'erreur de $\widehat{N_C}$ en fonction de l'angle dièdre entre τ_T et τ_C

L'angle ψ entre $\widehat{N_C}$ et $\widehat{N_T}$ se retrouve entre les plans tangents définis par ces normales. L'angle ψ est, de ce fait, également l'angle dièdre entre τ_C et τ_T. Nous devons évaluer l'incidence de cet angle sur la lecture des angles θ_i' entre les plans τ_C

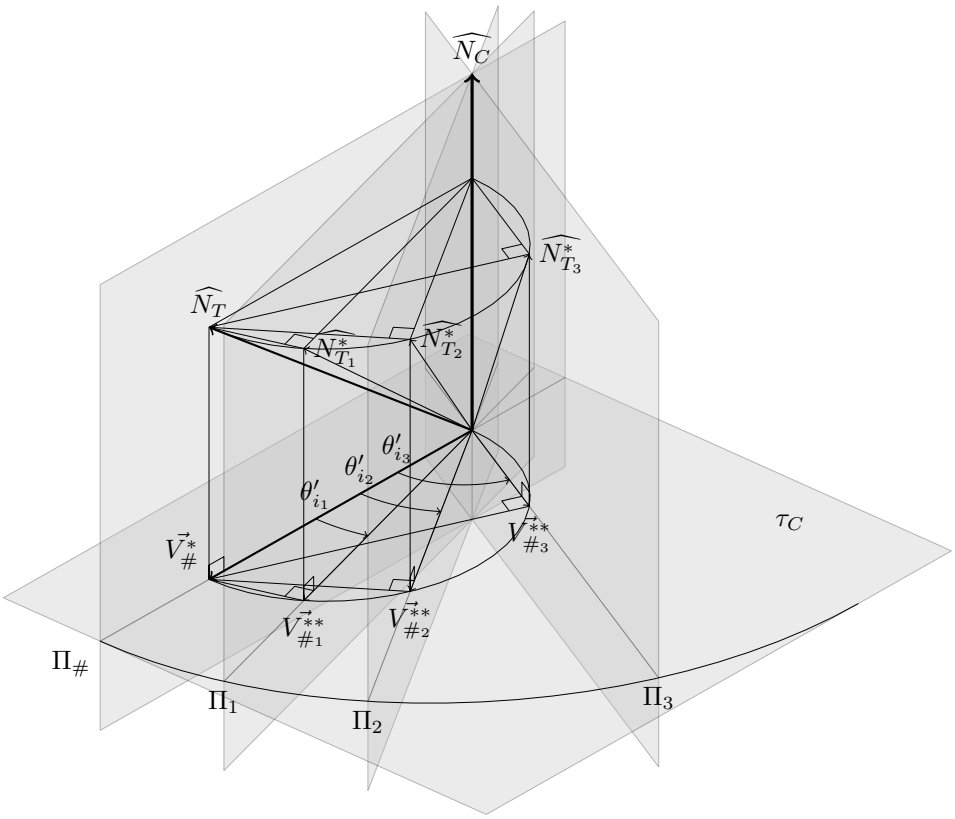


FIGURE 3.11 – Schéma de l'erreur entre $\widehat{N_T}$ et $\widehat{N_C}$ reportée sur les plans normaux $\Pi_i, i = 1, 2, 3$.

et τ_T. Pour illustrer ce phénomène, nous avons construit deux cas présentés par les Figures 3.12 et 3.13. Nous introduisons de nouvelles variables :

- β_i, l'angle orienté selon $\overrightarrow{N_T}$ entre $\overrightarrow{PP_i}$ et $\Pi_{\#}$.
- Les angles β_{i_C} et β_{i_T} sont les projections de β_i dans τ_C et τ_T.
- P_i^{**} est le point de projection orthogonale de $P_{i_C}^*$ et $P_{i_T}^*$ sur la droite d'intersection de τ_C et τ_T.
- Les points $P_{i_C}^*$ et $P_{i_T}^*$ sont respectivement les projections orthogonales de P_i sur τ_C et τ_T.
- $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_C$ et $\mathcal{A}_T$ sont les trajectoires décrites par respectivement les points P_i, P_{i_C} et P_{i_T} quand l'angle β_i parcourt l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Pour commencer, prenons une configuration simple (illustrée à la Figure 3.12), dans laquelle, le point P_i appartient au plan τ_T. Dans cette configuration P_i et P_{i_T} sont confondus (ainsi que les angles et les projections qui en résultent). La relation entre β_{i_C} et β_{i_T} est une simple projection orthogonale sur le plan τ_C. Cette construction induit les quatre triangles rectangles $\widehat{P_i^{**}P_{i_C}P_i}$, $\widehat{PP_{i_C}P_i}$, $\widehat{PP_i^{**}P_i}$ et $\widehat{PP_i^{**}P_{i_C}}$ et

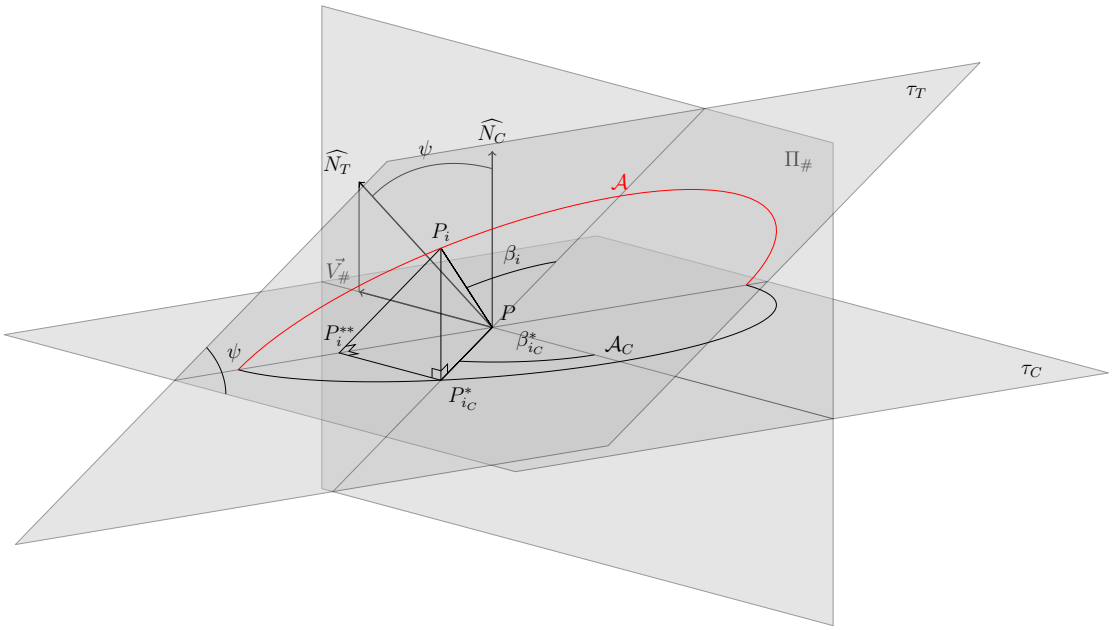


Figure 3.12 – Schéma de la dilatation des angles par simple projection orthogonale entre τ_C et τ_T.

les propriétés suivantes :

$$\cos(\psi) = \frac{\|\overrightarrow{P_i^{**}P_{i_C}}\|}{\|\overrightarrow{P_i^{**}P_i}\|} \longrightarrow \|\overrightarrow{P_i^{**}P_i}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_i^{**}P_{i_C}}\|}{\cos(\psi)}, \tag{3.25}$$

$$\tan(\beta_i) = \frac{\|\overrightarrow{PP_i^{**}}\|}{\|\overrightarrow{P_i^{**}P_i}\|} = \frac{\|\overrightarrow{PP_i^{**}}\| \cdot \cos(\psi)}{\|\overrightarrow{P_i^{**}P_{i_C}}\|} = \tan(\beta^*_{i_C}) \cdot \cos(\psi). \tag{3.26}$$

On note que dans sa définition, β_{i_C} est compris dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Sa construction est symétrique par rapport à l'intersection entre τ_C et τ_T. La transformation de $\beta^*_{i_T}$ à $\beta^*_{i_C}$ est analogue à celle entre θ'_{i_T} et θ'_{i_C}. On obtient :

$$\tan(\theta'_{i_T}) = \tan(\theta'_{i_C}) \cdot \cos(\psi). \tag{3.27}$$

Remarque 3.1 *Soient* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *telles que* $\tan(y) = \tan(x) \cdot k$.
Soit n *tel que* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in [n \cdot \pi - \frac{\pi}{2};\ n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}]$.
On a $y = \begin{cases} \arctan(\tan(x) \cdot k) + n \cdot \pi & si\ x \in \mathbb{R} \backslash \{n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\} \\ x & si\ x \in \{n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\} \end{cases}$.
ou encore $y = \arctan(\tan(x) \cdot k) - \arctan(\tan(x)) + x$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit que l'équation (3.27) peut se réécrire comme suit :

$$\theta'_{i_T} = \arctan(\tan(\theta'_{i_C}) \cdot \cos(\psi)) - \arctan(\tan(\theta'_{i_C})) + \theta'_{i_C}. \tag{3.28}$$

L'équation (3.24) décrivant $E(\theta'_i)$ comme une fonction cosinus appliquée sur θ'_{i_T} donne :

$$E(\theta'_{i_T}) \approx \lambda \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\theta'_{i_T}). \tag{3.29}$$

Soit $A = \lambda \cdot \sin(\psi)$, on a :

$$\begin{aligned}
E(\theta'_{i_T}) &\approx A \cdot \cos(\theta'_{i_T}) \\
&\approx A \cdot \cos(\arctan(\tan(\theta'_{i_C}) \cdot \cos(\psi)) - \arctan(\tan(\theta'_{i_C})) + \theta'_{i_C}) \\
&\approx A \cdot \cos(\arctan(\tan(\theta'_{i_C}) \cdot \cos(\psi))) \cdot \operatorname{sgn}(\cos(\theta'_{i_C})) \\
&\approx A \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\theta'_{i_C}) \cdot \cos^2(\psi) + 1}} \cdot \operatorname{sgn}(\cos(\theta'_{i_C})) \\
&\approx A \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\cos(\theta'_{i_C}))}{\sqrt{\tan^2(\theta'_{i_C}) \cdot \cos^2(\psi) + 1}} \\
&\approx A \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\cos(\theta'_{i_C}))}{|\frac{1}{\cos(\theta'_{i_C})}| \cdot \sqrt{\sin^2(\theta'_{i_C}) \cdot \cos^2(\psi) + \cos^2(\theta'_{i_C})}} \\
&\approx A \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\cos(\theta'_{i_C})) \cdot |\cos(\theta'_{i_C})|}{\sqrt{\sin^2(\theta'_{i_C}) \cdot \cos^2(\psi) + \cos^2(\theta'_{i_C})}}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Soit $T = \cos^2(\psi)$, on a :

$$\begin{aligned}
E(\theta'_{i_T}) &\approx A \cdot \frac{\cos(\theta'_{i_C})}{\sqrt{T \cdot \sin^2(\theta'_{i_C}) + \cos^2(\theta'_{i_C})}} \\
&\approx A \cdot \frac{\cos(\theta'_{i_C})}{\sqrt{T + (1-T) \cdot \cos^2(\theta'_{i_C})}}.
\end{aligned}$$

Quand $\psi \to 0$, on a $T \to 1$ et $E(\theta'_{i_T}) \to 0$.

Quand $\psi \to \frac{\pi}{2}$, on a $T \to 0$ et $E(\theta'_{i_T}) \to \lambda \cdot \frac{\cos(\theta'_{i_C})}{\sqrt{\cos^2(\theta'_{i_C})}} = \lambda \cdot \operatorname{sgn}(\cos(\theta'_{i_C}))$.

Ainsi, la fonction $E(\theta'_{i_T})$ tend vers une fonction cosinus de faible amplitude quand $\sin(\psi) \to 0$ et tend vers une fonction à palier quand $\sin(\psi) \to 1$. Jusque là, nous prenions en considération le cas de la Figure 3.12 dans lequel $P_i \in \tau_T$, ce qui entraîne qu'il n'y a qu'une projection orthogonale pour passer de θ'_{i_T} à θ'_{i_C}. Maintenant considérons un cas plus général, présenté à la Figure 3.13, dans lequel $P_i \notin \tau_T$. Dans ce cas, le passage de θ'_{i_T} à θ'_{i_C} n'est plus une simple projection orthogonale. Ici $\beta^*_{i_T}$ et $\beta^*_{i_C}$ sont les résultats des projections de β_i sur τ_T et τ_C. L'angle ψ peut être scindé en deux : ψ_1 et ψ_2, où ψ_1 est l'angle de la projection sur τ_C et ψ_2 l'angle de la projection sur τ_T. Par le même cheminement que précédemment (cf. Équation (3.26)), on obtient les équations suivantes :

$$\tan(\theta'_i) = \tan(\theta'_{i_C}) \cdot \cos(\psi_1), \tag{3.31}$$

$$\tan(\theta'_i) = \tan(\theta'_{i_T}) \cdot \cos(\psi_2). \tag{3.32}$$

On obtient alors :

$$\tan(\theta'_{i_T}) = \tan(\theta'_{i_C}) \cdot \frac{\cos(\psi_1)}{\cos(\psi_2)}, \tag{3.33}$$

$$\theta'_{i_T} = \arctan\left(\tan(\theta'_{i_C}) \cdot \frac{\cos(\psi_1)}{\cos(\psi_2)}\right) - \arctan(\tan(\theta'_{i_C})) + \theta'_{i_C}. \tag{3.34}$$

Et l'expression de la fonction d'erreur devient :

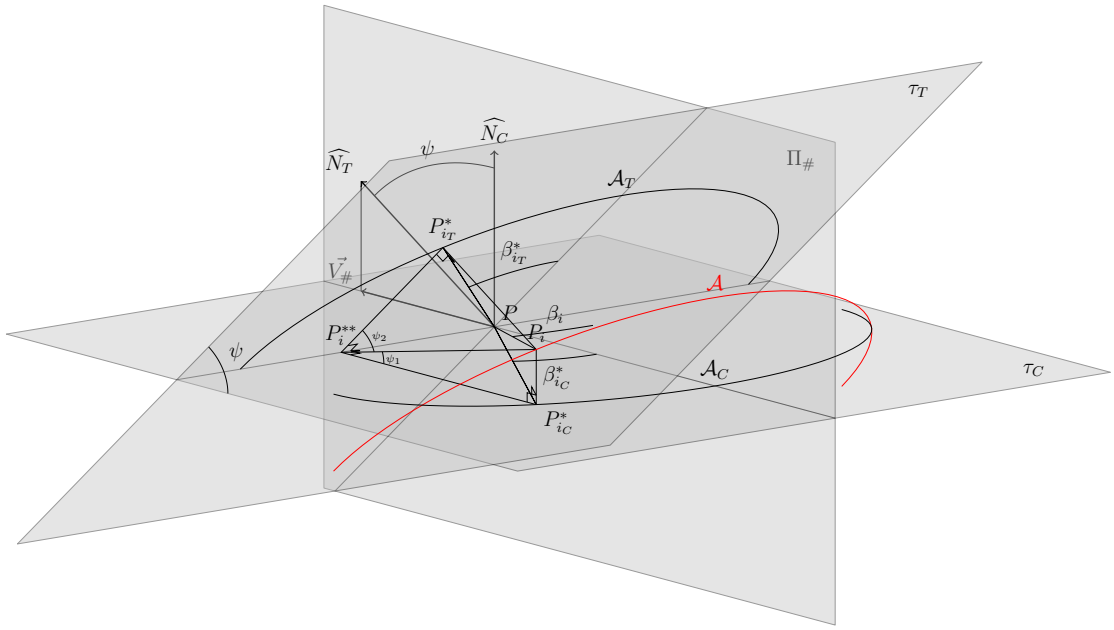


Figure 3.13 – Schéma de la dilatation des angles par double projection orthogonale entre τ_C et τ_T.

$$\begin{aligned}
E(\theta'_{i_T}) &\approx A \cdot \cos\left(\arctan(\tan(\theta'_{i_C}) \cdot \tfrac{\cos(\psi_1)}{\cos(\psi_2)}\right) - \arctan(\tan(\theta'_{i_C})) + \theta'_{i_C}) \\
&\approx A \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\theta'_{i_C}) \cdot \frac{\cos^2(\psi_1)}{\cos^2(\psi_2)} + 1}} \cdot \operatorname{sgn}(\cos(\theta'_{i_C})).
\end{aligned}$$

Soit $T = \frac{\cos^2(\psi_1)}{\cos^2(\psi_2)}$, on a :

$$\begin{aligned}
E(\theta'_{i_T}) &\approx A \cdot \frac{\cos(\theta'_{i_C})}{\sqrt{T \cdot \sin^2(\theta'_{i_C}) + \cos^2(\theta'_{i_C})}} \\
&\approx A \cdot \frac{\cos(\theta'_{i_C})}{\sqrt{T + (1-T) \cdot \cos^2(\theta'_{i_C})}}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Au final, nous obtenons la même fonction que pour le cas simple à ceci près que T n'est plus compris dans l'intervalle $[0; 1]$ mais que T appartient à $\mathbb{R}^+$. La Figure 3.14 donne des exemples de courbes de la fonction d'erreur avec différentes valeurs de ψ en fixant la valeur $A = 1$.

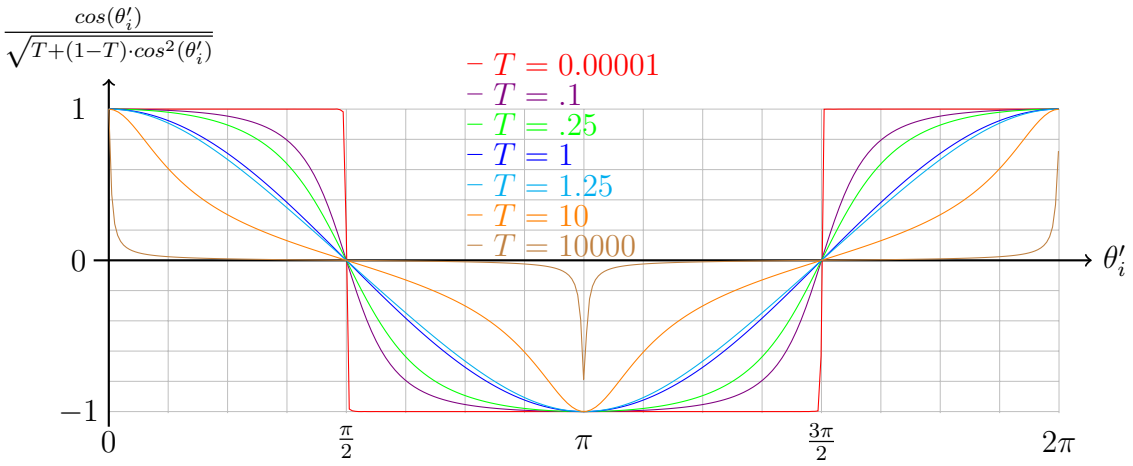


FIGURE 3.14 – La fonction $E(\theta'_i)$ normalisée avec différentes valeurs de T.

Modélisation de la fonction $E(\theta'_i)$

Reprenons l'approximation de l'erreur résultante de l'équation (3.35) :

$$E(\theta'_{i_T}) \approx \lambda \cdot \sin(\psi) \cdot \frac{\cos(\theta'_{i_C})}{\sqrt{T + (1-T) \cdot \cos^2(\theta'_{i_C})}} \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } T \in \mathbb{R}^+\text{).} \quad (3.36)$$

Cette fonction se comporte comme les fonctions suivantes suivant le paramètre T :
- $\lambda \cdot \sin(\psi) \cdot \text{sgn}(\cos(\theta'_i))$ quand T tend vers 0 ;
- $\lambda \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\theta'_i)$ quand T tend vers 1 ;
- la fonction inverse de $\lambda \cdot \sin(\psi) \cdot \text{sgn}(\cos(\theta'_i))$ quand T tend vers $+\infty$.

Elle est, de ce fait trop complexe pour servir de base de régression. Aussi nous choisissons d'ignorer la déformation d'angle entre θ'_{i_C} et θ'_{i_T} due à l'angle dièdre entre τ_C et τ_T et de la simplifier par une fonction cosinus (Équation (3.37)).

$$E(\theta'_i) \approx \Lambda \cdot \cos(\theta'_i) \text{ où } \Lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

De la même façon que dans la méthode du *SineFitting* avec θ_i, ici θ'_i étant inconnu, nous posons :

$$\theta'_i = \alpha_i + \phi' \quad (3.38)$$

où α_i est défini dans l'équation (2.41) et nous avons :

$$E(\theta'_i) \approx \Lambda \cdot \cos(\alpha_i + \phi'). \quad (3.39)$$

Ce qui, comme le montre la preuve .2 (page 145), peut s'écrire sous la forme :

$$E(\theta'_i) \approx d' \cdot \cos(\alpha_i) + e' \cdot \sin(\alpha_i) \text{ avec } (d', e') \in \mathbb{R}^2. \quad (3.40)$$

Maintenant nous reprenons l'équation de l'évaluation des k_i dans la méthode du *SineFitting* (Équation (2.44)) et nous y incorporons cette modélisation de l'erreur. Nous obtenons alors :

$$k_i \approx a' \cdot \cos(2\alpha_i) + b' \cdot \sin(2\alpha_i) + c' + d' \cdot \cos(\alpha_i) + e' \cdot \sin(\alpha_i) \tag{3.41}$$

où $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ correspondent aux valeurs (a, b, c) de l'équation (2.44) si et seulement si la valeur de l'expression $\sqrt{d'^2 + e'^2}$ est nulle. Dans le cas contraire, on a : $(a, b, c) \neq (a', b', c')$, ce qui est dû au fait que la modélisation de l'erreur sous la forme d'une sinusoïde n'est qu'une approximation. Cette approximation ne donne pas directement les valeurs de ϕ' et ψ mais permet d'avoir une valeur approximée de ϕ'. Dans la partie suivante nous allons détailler l'algorithme qui utilise cette approximation de l'erreur de la normale pour la corriger.

3.3.2 Description de l'algorithme de l'*ExtendedSineFitting*

L'algorithme de la méthode *ExtendedSineFitting* est un algorithme itératif qui utilise l'équation (3.41) à laquelle on adjoint une modélisation de l'erreur due à une mauvaise estimation de la normale. Le principe de fonctionnement de cet algorithme est le suivant :

1. calculer une approximation de ϕ' par régression via la méthode des moindres carrés sur l'équation (3.38),
2. calculer une approximation de $\psi = \angle(\widehat{N_C}, \widehat{N_T})$ par trichotomie,
3. appliquer la correction sur $\widehat{N_C}$,
4. si l'amplitude d'erreur est au-dessus d'un certain seuil de précision ε, recommencer à l'étape 1.

L'algorithme s'arrête quand la partie propre à l'erreur dans l'équation (3.41), *i.e.*, $(d' \cdot \cos(\alpha_i) + e' \cdot \sin(\alpha_i))$, est d'amplitude inférieure à ε, autrement dit quand $\sqrt{d'^2 + e'^2} < \varepsilon$.

Calculer une approximation de ϕ'

Dans cette première étape, nous cherchons à déterminer une approximation de ϕ' ou plus précisément, nous cherchons à identifier au mieux le plan normal $\Pi_\#$. Pour cela, nous évaluons les courbures normales k_i par l'équation (2.39) et nous utilisons l'équation (3.41) qui sert de base de régression. L'Algorithme 2 décrit cette régression. On obtient ainsi les coefficients a', b', c', d' et e'. De ces coefficients, on extrait ϕ' comme montré dans la preuve .2. On a :

$$\phi' = \begin{cases} -\arctan(\frac{e'}{d'}) & \text{si } d' > 0, \\ -(\arctan(\frac{e'}{d'} + \pi) & \text{si } d' < 0, \\ -\operatorname{sgn}(e') \cdot \pi/2 & \text{si } d' = 0. \end{cases} \tag{3.42}$$

Algorithme 2 Régression sur l'équation de la méthode *ExtendedSineFitting* (Équation (3.41)).

fonction EXTENDEDSINEFITTING(P, $\{P_i\}$, $\widehat{N}$, a', b', c', d', e')
  ****** Échantillonnage ******
    Soit τ le plan tangent en P avec la normale $\widehat{N}$
    pour tout $i \in [0, 1, ..., m-1]$ **faire**
      $P_i^* \leftarrow$ projection de P_i sur τ
      $\vec{T_i} \leftarrow \frac{P\vec{P}_i^*}{\|P\vec{P}_i^*\|}$
      si $(i = 0)$ **alors**
        $\alpha_i \leftarrow 0$
      sinon
        $\alpha_i \leftarrow \begin{cases} \arccos(\vec{T_0} \cdot \vec{T_i}) & \text{si } (\widehat{\langle \vec{T_0}, \vec{T_i} \rangle} \cdot \widehat{N} > 0) \\ 2 \cdot \pi - \arccos(\vec{T_0} \cdot \vec{T_i}) & \text{sinon} \end{cases}$ ▷ $\alpha_i = \measuredangle(\vec{T_0}, \vec{T_i})$
      fin si
      $k_i \leftarrow 2 \cdot \frac{\vec{P_iP} \cdot \widehat{N}}{\|\vec{P_iP}\|^2}$ ▷ estimation des courbures normales pour chaque $\overrightarrow{P_iP}$ suivant l'Équation 2.39
    fin pour
  ****** Régression ******
    Régression par la méthode des moindres carrés sur l'Équation 3.41 pour estimer a', b', c', d' et e' tels que

$$\begin{pmatrix} \cos(2\cdot\alpha_0) & \sin(2\cdot\alpha_0) & 1 & \cos(\alpha_0) & \sin(\alpha_0) \\ \cos(2\cdot\alpha_1) & \sin(2\cdot\alpha_1) & 1 & \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) \\ \cos(2\cdot\alpha_2) & \sin(2\cdot\alpha_2) & 1 & \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(2\cdot\alpha_{m-1}) & \sin(2\cdot\alpha_{m-1}) & 1 & \cos(\alpha_{m-1}) & \sin(\alpha_{m-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_{m-1} \end{pmatrix}$$

fin fonction

Déterminer la meilleure approximation de ψ

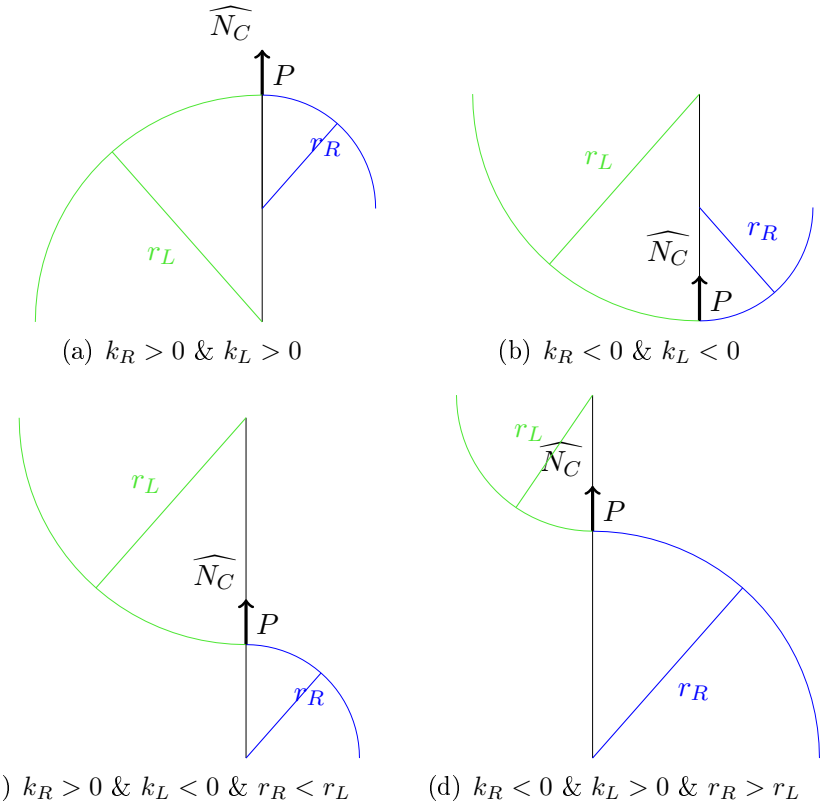
De par l'évaluation de ϕ', on obtient les angles α_L et α_R et les valeurs des courbures normales k_L et k_R de chaque côté de la normale en P dans le plan $\Pi_\#$ (cf. Équations (3.43) et (3.44)).

$$\alpha_L = \pi - \phi', \ \alpha_R = -\phi'. \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} k_L &= a' \cdot \cos(2 \cdot \alpha_L) + b' \cdot \sin(2 \cdot \alpha_L) + c' + d' \cdot \cos(\alpha_L) + e' \cdot \sin(\alpha_L) \\ k_R &= a' \cdot \cos(2 \cdot \alpha_R) + b' \cdot \sin(2 \cdot \alpha_R) + c' + d' \cdot \cos(\alpha_R) + e' \cdot \sin(\alpha_R) \\ r_L &= \tfrac{1}{|k_L|}, r_R = \tfrac{1}{|k_R|}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

D'après les calculs de k_L et k_R, nous avons différents cas de constructions possibles. Ces cas sont présentés à la Figure 3.15. Toutefois, il est peu probable de trouver des voisins de P de chaque côté dans ce plan donc on ne peut pas estimer directement l'angle ψ. Pour pallier ce problème, nous les reconstruisons. La reconstruction de ces voisins P_L et P_R se fait par calcul d'intersection entre un cercle de centre P et de rayon ρ (qui est la distance d'échantillonnage) et les cercles de rayons r_L et r_R et de centres O_L et O_R. O_L et O_R sont définis comme suit :

$$O_L = P - \widehat{N} \cdot \frac{1}{k_L},\ O_R = P - \widehat{N} \cdot \frac{1}{k_R}. \tag{3.45}$$



(a) $k_R > 0$ & $k_L > 0$ (b) $k_R < 0$ & $k_L < 0$

(c) $k_R > 0$ & $k_L < 0$ & $r_R < r_L$ (d) $k_R < 0$ & $k_L > 0$ & $r_R > r_L$

Figure 3.15 – Schéma de l'ensemble des cas résultants du calcul de k_L et k_R.

Le calcul de l'angle de correction après construction de P_L et P_R se fait par le calcul de la normale du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle $\widehat{P_L P P_R}$ (cf. Figure 3.16). Comme ce triangle est isocèle en P, la normale du cercle $\mathcal{C}$ en P est aussi la hauteur et la médiatrice du triangle en P. On en déduit que la tangente à $\mathcal{C}$ en P est parallèle à la droite qui passe par P_L et P_R. Trouver l'angle entre la normale $\widehat{N}$ et la normale $\widehat{N_\#}$ du cercle $\mathcal{C}$ en P revient à trouver l'angle entre τ_C et $\overrightarrow{P_L P_R}$. Nous définissons un repère local orthonormé à deux dimensions dans le plan $\Pi_\#$. Ce repère est centré en P et ses axes sont définis dans l'ordre direct par $(\widehat{t_C}, \widehat{N_C})$. D'après le Lemme

3.1 (page 3.1), le calcul de l'angle ψ revient à calculer l'arc-tangente du coefficient directeur de la droite $(P_L P_R)$ dans le repère $(P, \widehat{t_C}, \widehat{N_C})$. Pour calculer ce coefficient η, nous définissons M_L et M_R les milieux respectifs des segments $[PP_L]$ et $[PP_R]$, puis nous construisons les projections orthogonales P_L^* et P_R^* de P_L et P_R sur l'axe défini par $\widehat{N_C}$. On a :

$$\eta = \frac{(\overrightarrow{PP_R} - \overrightarrow{PP_L}) \cdot \widehat{N_C}}{\|\overrightarrow{P_R P_R^*}\| + \|\overrightarrow{P_L P_L^*}\|} \tag{3.46}$$

ou plus exactement (cf. Preuve .3) :

$$\eta = \frac{r_R \cdot \mathrm{sgn}(k_L) - r_L \cdot \mathrm{sgn}(k_R)}{r_L \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot r_R^2}{\rho^2} - 1} + r_R \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot r_L^2}{\rho^2} - 1}} \tag{3.47}$$

et :

$$\psi = \arctan(\eta). \tag{3.48}$$

Lemme 3.1 *Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{D}$ une droite de coefficient directeur η. Alors α, l'angle décrit entre $\mathcal{D}$ et l'axe des abscisses, est égal à* $\arctan(\eta)$.

Nous devons maintenant définir un intervalle probable pour la valeur ρ, ρ étant la distance d'échantillonnage pour les points P_L et P_R. Le cercle de rayon ρ doit intersecter les cercles de courbure de chaque côté de P. De ce fait :

$$\rho \in [0, 2 \cdot min(r_R, r_L)]. \tag{3.49}$$

Pour avoir un angle de correction ψ proportionnel ou inversement proportionnel à ρ, on définit ρ dans l'intervalle :

$$\rho \in [0, \sqrt{2 \cdot min(r_R, r_L)^2}]. \tag{3.50}$$

Ainsi les intersections ne dépasseront pas les premiers quarts de cercles de chaque côté de P. La figure 3.17 donne les constructions faites sur les cas présentés à la Figure 3.15.

Il ne reste plus qu'à déterminer la meilleure valeur de ψ à appliquer en correction à $\widehat{N_C}$. En effet, comme on peut le voir à la Figure 3.18, suivant la distance d'échantillonnage ρ on obtient un angle ψ proportionnel. Pour cela nous définissons la fonction **ErreurDe**$(P, \{P_i\}, \widehat{N})$ telle que décrite dans l'Algorithme 3, qui retourne l'amplitude de la composante de l'erreur due à l'estimation d'une normale $\widehat{N}$ dans la régression sur l'équation (3.41) en utilisant l'Algorithme 2. Cette valeur appelée

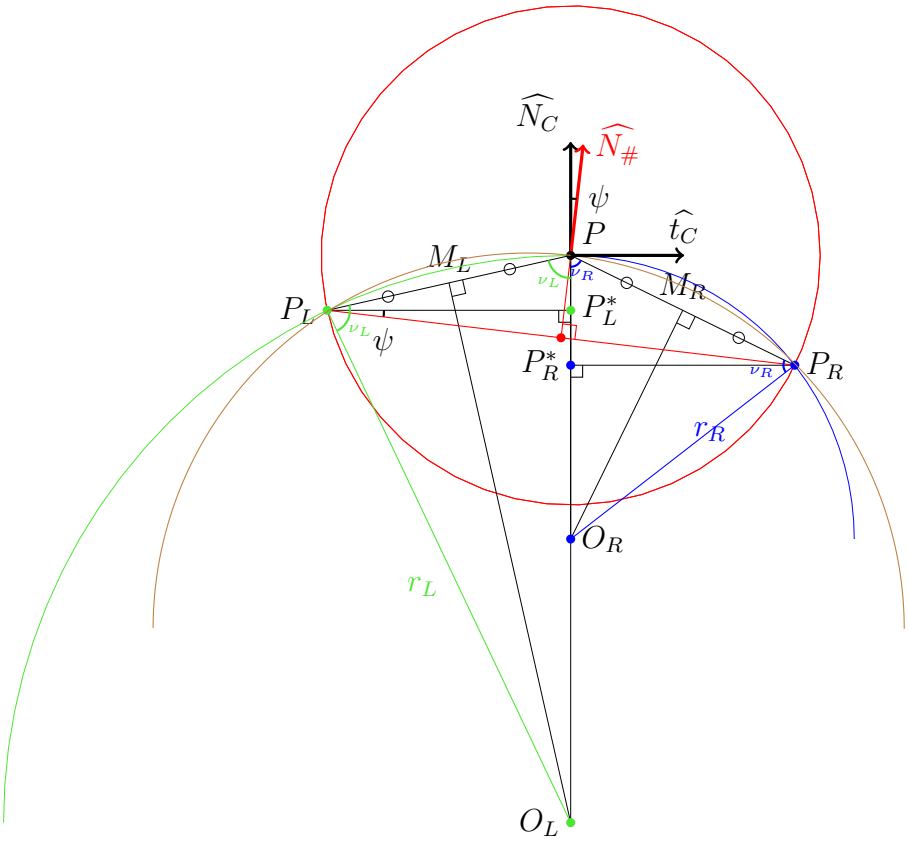


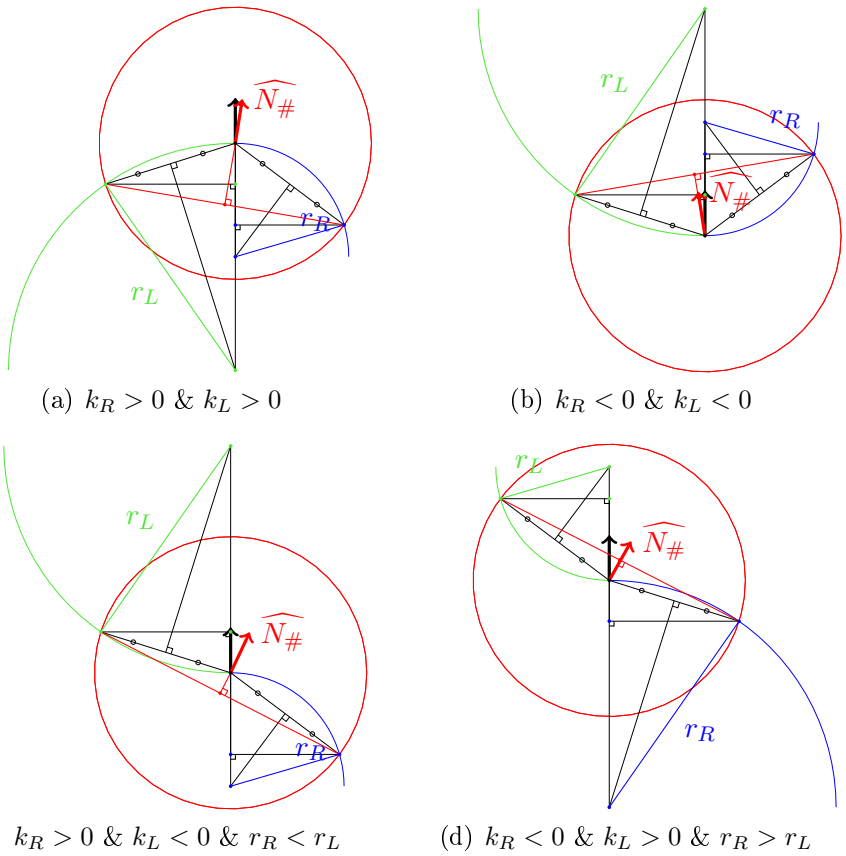
Figure 3.16 – Schéma du calcul de l'angle de correction.

erreur appartient à un intervalle qui est fonction de ρ :

$$\begin{aligned}
\widehat{N}_{\#(\psi_{Min})} &= \widehat{N_C} \text{ corrigée de l'angle } \psi_{Min},\\
\widehat{N}_{\#(\psi_{Max})} &= \widehat{N_C} \text{ corrigée de l'angle } \psi_{Max}.\\
erreur_{\psi_{Min}} &= \textbf{ErreurDe}(P, \{P_i\}, \widehat{N}_{\#(\psi_{Min})})\\
erreur_{\psi_{Max}} &= \textbf{ErreurDe}(P, \{P_i\}, \widehat{N}_{\#(\psi_{Max})})
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Algorithme 3 Estimation de l'amplitude de l'erreur de la normale.

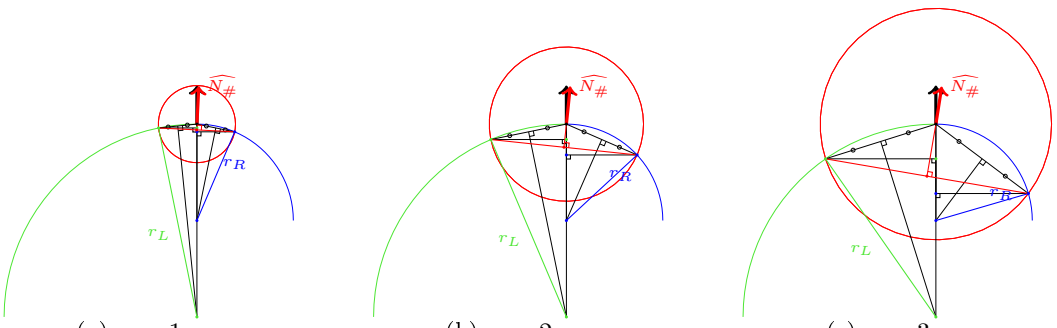
1: **fonction** ErreurDe(P, $\{P_i\}$, $\widehat{N}$)
2: Soit a', b', c', d', e' ▷ coefficients de l'Équation 3.41
3: **ExtendedSineFitting**($P, \{P_i\}, \widehat{N}, a', b', c', d', e'$)
4: *return* $\sqrt{d'^2 + e'^2}$
5: **fin fonction**



(a) $k_R > 0$ & $k_L > 0$ (b) $k_R < 0$ & $k_L < 0$

(c) $k_R > 0$ & $k_L < 0$ & $r_R < r_L$ (d) $k_R < 0$ & $k_L > 0$ & $r_R > r_L$

FIGURE 3.17 – Schéma de l'ensemble des cas résultants du calcul de k_L et k_R.



(a) $\rho = 1$ (b) $\rho = 2$ (c) $\rho = 3$

FIGURE 3.18 – Schéma de différentes reconstruction de P_L et P_R et suivant la distance de discrétisation ρ et l'estimation de la correction de la normale qui en découle.

Considérons que cette fonction d'erreur est strictement décroissante sur $[\psi_{Min}; \psi]$ et strictement croissante sur $]\psi; \psi_{Max}]$. On cherche à trouver la valeur minimale de cette fonction sur l'intervalle $[\psi_{Min}, \psi_{Max}]$. Comme cette fonction n'est pas connue, aussi nous ne pouvons faire la recherche de cette valeur que par échantillonnages

et réductions de l'intervalle successifs. Nous procédons par une recherche trichotomique. La recherche par trichotomie, comme le présente la Figure 3.19, fonctionne sur une réduction d'un tiers à chaque passage. Pour chaque boucle, on prend deux valeurs de la fonction à 1/3 et 2/3 de l'intervalle en cours. On obtient respectivement les valeurs A et B. Si $A \leq B$, on retire le troisième tiers, sinon le premier. On réduit successivement l'intervalle jusqu'à ce que la différence entre le début et la fin de cet intervalle soit inférieure à ε ($\varepsilon > 0$).

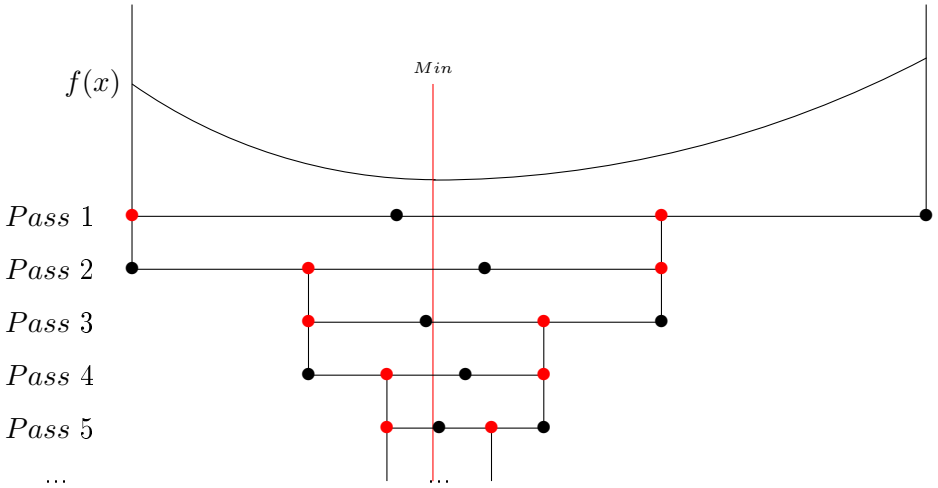


Figure 3.19 – Schéma d'un exemple de recherche par trichotomie.

On détermine ainsi le meilleur angle de correction de $\widehat{N_C}$ dans $\Pi_{\#}$.

Appliquer la correction

$\widehat{N_C}$ subit une rotation d'angle ψ déterminé par la trichotomie dans le plan $\Pi_{\#}$ estimé (cf. Figure 3.9).

Si l'amplitude d'erreur est au dessus d'un certain seuil de précision $\varepsilon > 0$ recommencer à l'étape 1

La correction apportée à $\widehat{N_C}$ par l'estimation de $\widehat{N_{\#}}$ n'étant qu'un résultat approximatif, l'algorithme boucle en retournant à l'étape 1 si l'amplitude d'erreur restante est supérieur à un seuil de précision ε. L'algorithme global est donné en pseudo-code par l'Algorithme 4.

Cette méthode convient à des calculs de précision ne nécessitant pas des temps de calcul performants. Elle est applicable sur un nuage de points. Sa complexité de calcul est d'ordre $k \cdot O(n^2)$ où k est le nombre de régressions réalisé dans la trichotomie multiplié par le nombre de passages de l'algorithme itératif et n la cardinalité du voisinage. Expérimentalement, avec un ε de 10^{-7}, en C++ sur des valeurs en réels double précision, k est majoré par une valeur de l'ordre de 10^3.

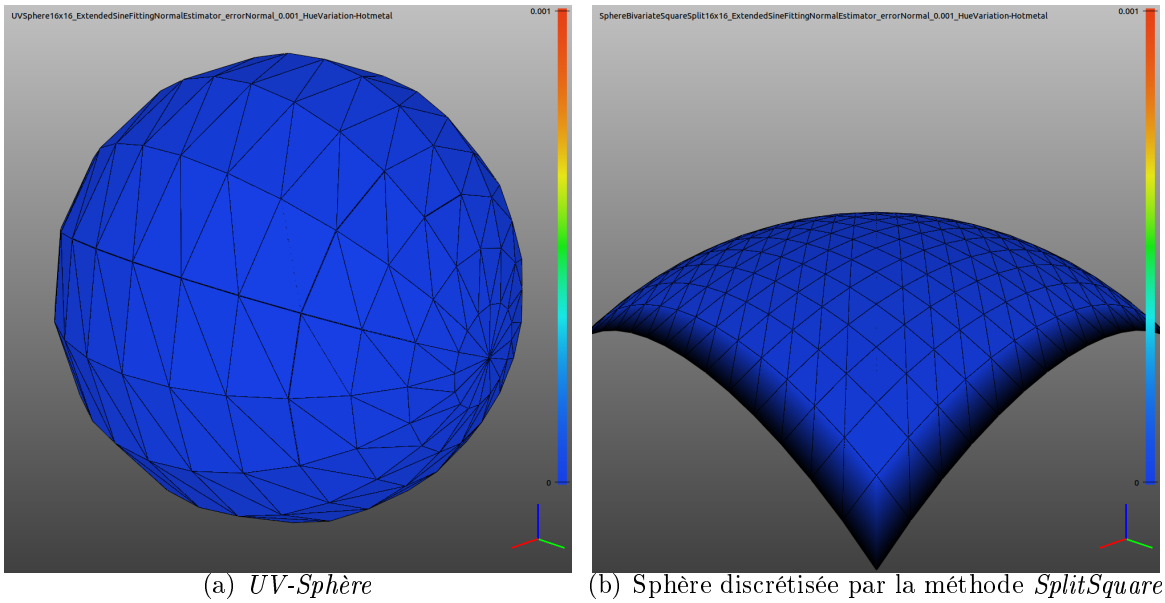
Algorithme 4 Algorithme global de la méthode *ExtendedSineFitting*.

Entrées: S, T_S , $P \in T_S$, $\varepsilon > 0$ *(précision)*
Sortie: $\widehat{N}$ *(normale estimée au point P)*

$\{P_i\} \leftarrow$ extraction du voisinage $\{P_i\}$ de P
Soit $m \leftarrow |\{P_i\}|$,
$\Delta_{Err} \leftarrow 2 \cdot \varepsilon$ ▷ amplitude de l'erreur initialisée avec une valeur quelconque supérieure à ε
tant que $(\Delta_{Err} \geq \varepsilon)$ **faire**
  ***** Initialisation ******
    Soit a', b', c', d', e' ▷ coefficients de l'Équation 3.41
    ExtendedSineFitting$(P, \{P_i\}, \widehat{N}, a', b', c', d', e')$
    $\phi' \leftarrow \begin{cases} -\arctan(\frac{e'}{d'}) & \text{si } d' > 0 \\ -(\arctan(\frac{e'}{d'} + \pi) & \text{si } d' < 0 \\ -\operatorname{sgn}(e') \cdot \pi/2 & \text{si } d' = 0 \end{cases}$
    $\Delta_{Err} \leftarrow \sqrt{c'^2 + d'^2}$
    si $(\Delta_{Err} < \varepsilon)$ **alors**
      quitter
    fin si
    $\alpha_L \leftarrow -\phi'$; $\alpha_R \leftarrow \pi - \phi'$
    $k_L \leftarrow a' \cdot \cos(2 \cdot \alpha_L) + b' \cdot \sin(2 \cdot \alpha_L) + c' + d' \cdot \cos(\alpha_L) + e' \cdot \sin(\alpha_L)$
    $k_R \leftarrow a' \cdot \cos(2 \cdot \alpha_R) + b' \cdot \sin(2 \cdot \alpha_R) + c' + d' \cdot \cos(\alpha_R) + e' \cdot \sin(\alpha_R)$
    $r_L \leftarrow |k_L^{-1}|$; $r_R \leftarrow |k_R^{-1}|$
    $\rho_{Max} \leftarrow \sqrt{2 \cdot min(r_L, r_R)^2}$
    $\eta_{Min} \leftarrow \eta_{Max} \leftarrow \infty$
    si $r_L \neq r_R$ **alors**
      $\eta_{Min} \leftarrow 0$
      $\eta_{Max} \leftarrow \frac{r_R \cdot \operatorname{sgn}(k_L) - r_L \cdot \operatorname{sgn}(k_R)}{r_L \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot r_R^2}{\rho_{Max}^2} - 1} + r_R \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot r_L^2}{\rho_{Max}^2} - 1}}$
    fin si
  ***** Minimisation par trichotomie ******
    Soit $\vec{T_R}$ la tangente de $\widehat{N}$ tel que $\angle(\vec{T_0}, \vec{T_R}) = \phi'$
    $\psi_{Min} \leftarrow arctan(\eta_{Min})$
    $\psi_{Max} \leftarrow arctan(\eta_{Max})$
    $erreur_{Min} \leftarrow$ **ErreurDe**$(P, \{P_i\}, \widehat{N}_{\#(\psi_{Min})})$
    $erreur_{Max} \leftarrow$ **ErreurDe**$(P, \{P_i\}, \widehat{N}_{\#(\psi_{Max})})$
    tant que $|erreur_{Max} - erreur_{Min}| > \varepsilon$ **faire**
      $\psi_1 \leftarrow (\psi_{Max} - \psi_{Min}) \cdot 1/3 + \psi_{Min}$
      $erreur_1 \leftarrow$ **ErreurDe**$(P, \{P_i\}, \widehat{N}_{\#(\psi_1)})$
      $\psi_2 \leftarrow (\psi_{Max} - \psi_{Min}) \cdot 2/3 + \psi_{Min}$
      $erreur_2 \leftarrow$ **ErreurDe**$(P, \{P_i\}, \widehat{N}_{\#(\psi_2)})$
      si $(erreur_1 \leq erreur_2$ **alors**
        $erreurs_{Max} \leftarrow erreur_2$
        $\psi_{Max} \leftarrow \psi_2$
      sinon
        $erreurs_{Min} \leftarrow erreur_1$
        $\psi_{Min} \leftarrow \psi_1$
      fin si
    fin tant que
    $\widehat{N} \leftarrow \widehat{N}_{\#(\psi_{Min})}$
    $\Delta_{Err} \leftarrow$ **ErreurDe**$(P, \{P_i\}, \widehat{N})$
fin tant que

3.4 Discussion de la méthode

L'*ExtendedSineFitting* est une méthode itérative de correction de normale qui modélise l'erreur de la normale comme une fonction sinusoïdale de période 2π. Quand l'algorithme termine, on obtient une normale qui minimise l'asymétrie de l'erreur entre les valeurs échantillonnées et la composante sinusoïdale de période π qui modélise la courbure selon l'équation d'Euler (cf. Équation (1.8)). De ce fait, l'erreur de l'évaluation de normale restant est due à l'interpolation de la surface entre P et ses voisins $\{P_i\}$ tout comme pour l'estimateur de courbure *SineFitting*. En reprenant les tests faits dans les éléments de comparaison (cf. Figures 3.6 et 3.7), le nouvel estimateur *ExtendedSineFitting* est en effet moins sensible aux répartitions spatiales du voisinage (cf. Figure 3.20). Pour aller plus loin dans la comparaison, un ensemble de tests de comparaisons a été défini. Ces tests sont décrits dans le chapitre 4.



(a) *UV-Sphère* (b) Sphère discrétisée par la méthode *SplitSquare*

Figure 3.20 – Erreur d'estimation de la normale avec la méthode *ExtendedSineFitting* (échelle de couleur *HotMetal* sur l'intervalle $[0, 0.001]$).

Chapitre 4

Expérimentations

Afin de comparer les différents estimateurs de courbure ou de normale, nous avons mis en place un ensemble de tests inspirés de [GG03], [GS03] et [Ham91]. Ces tests ont pour but de mettre en avant les qualités de précision, convergence et stabilité face à des perturbations dues à la discrétisation de la surface sous la forme de maillage comme l'ont fait [XX08, Mor08, CCLT09]. Ces expérimentations ont été implémentées sous forme de plugins sur la plate-forme de recherche SmithDR [ACDR13].

4.1 Principe expérimental

L'objectif de nos recherches est de travailler sur des données issues d'acquisition. Aussi nos tests doivent mettre en avant, dans un cadre de paramétrisation contrôlée, le comportement des estimateurs aux différentes perturbations caractéristiques d'une donnée acquise, *i.e.* un voisinage réparti irrégulièrement autour du point d'analyse. Ces irrégularités sont caractérisables par des variations en angle, en distance, asymétrie en angle et asymétrie en distance. Nous avons pour cela recensé deux tests existants. Le premier est celui de Garimella et Swartz [GS03], un test de convergence ponctuelle avec ajout d'une perturbation d'angle et le second est celui de Gatzke et Grimm [GG06] qui reprend les fonctions de Hamann [Ham91].

4.1.1 Le test de Garimella et Swartz [GS03]

Dans [GS03], Garimella et Swartz reprennent les estimateurs de courbure *DCO*, *SQFA* et *EQFA* pour les comparer via un test de convergence ponctuelle sur la surface d'un cylindre de rayon 2.

Ce test consiste à construire un voisinage au point d'analyse P par discrétisation régulière de la courbe d'intersection entre la surface du cylindre de rayon r_c et une sphère de rayon r_s variable centrée en P. On obtient ainsi, dans un premier temps, six voisins à P, symétriques, à angles réguliers les uns par rapport aux autres autour

de P et dont la distance euclidienne par rapport P est toujours égale à r_s. Dans ce contexte, le calcul de l'intersection se fait comme suit :

- On définit six variables : x_0, x_1, y_0, y_1, z_0 et z_1 telles que : $z_0 = r_s$, $z_1 = r_s/2$, $x_0 = r_c$, $x_1 = (z_1^2 + 2 \cdot r_c^2 - r_s^2)/(2 \cdot r_c)$, $y_0 = 0$ et $y_1 = \sqrt{r_c^2 - x_1^2}$.
- On obtient alors les coordonnées des six voisins de P (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5) comme illustré sur la figure 4.1.

Pour chaque estimateur de courbure, les auteurs prennent comme entrée la normale calculée par la méthode *AreaWeighted*. Le test de convergence se fait par la réduction successive de r_s de 0,5 à 0,0005 comme présenté dans le Tableau 4.1.

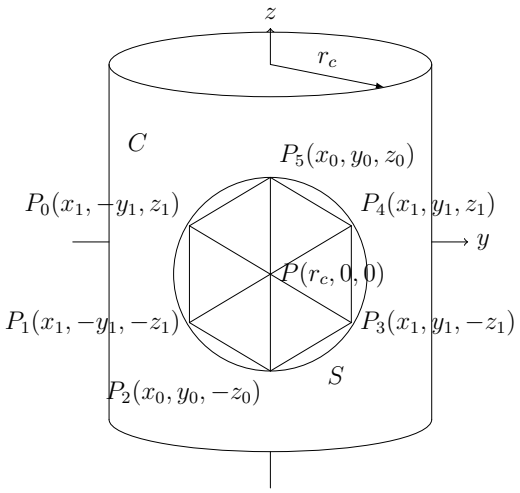


FIGURE 4.1 – Voisinage régulier à 6 voisins sur la surface cylindrique.

Au travers de la courbure moyenne, sur ce premier test, ils observent que les trois estimateurs convergent vers la valeur théorique à savoir $0,25$.

Ils proposent alors d'apporter une perturbation à la construction de ce voisinage. Ils introduisent une perturbation d'angle en déplaçant le point P_3 avec $P_3 = (x_{1_{Alt}}, y_{1_{Alt}}, -z_{1_{Alt}})$ où :

$$z_{1_{Alt}} = \frac{4}{5} \cdot r_s. \tag{4.1}$$

Puis $x_{1_{Alt}}$ et $y_{1_{Alt}}$ sont recalculés pour remettre le point sur l'intersection entre le cylindre et la sphère. On a alors :

$$x_{1_{Alt}} = \frac{z_{1_{Alt}}^2 + 2 \cdot r_c^2 - r_s^2}{2 \cdot r_c} \tag{4.2}$$

et

$$y_{1_{Alt}} = \sqrt{r_c^2 - x_{1_{Alt}}^2} \tag{4.3}$$

(cf. Figure 4.2).

Le Tableau 4.1 donne le résultat de ce test. Sur celui-ci on peut remarquer que *EQFA* converge toujours vers la valeur théorique alors le *SQFA* converge vers une valeur erronée. Mais le plus important est que, sur ce test, le *DCO* ne converge plus.

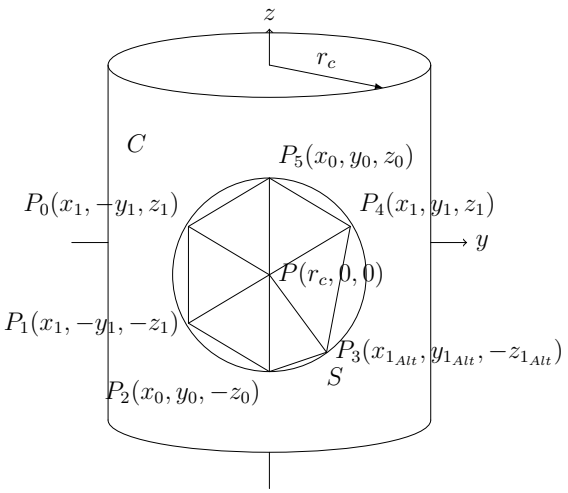


Figure 4.2 – Voisinage régulier à 6 voisins avec une perturbation d'angle sur la surface cylindrique.

Distance du voisinage (r_s)	*DCO*	*SQFA*	*EQFA*
0,5000	0,231580	0,250790	0,252723
0,4500	0,231583	0,250287	0,252204
0,4000	0,231475	0,249711	0,251752
0,3500	0,231590	0,249447	0,251336
0,3000	0,231577	0,249092	0,250970
0,2500	0,231583	0,248810	0,250678
0,2000	0,231572	0,248559	0,250420
0,1500	0,231570	0,248376	0,250230
0,1000	0,231640	0,248323	0,250172
0,0500	0,231654	0,248257	0,250107
0,0050	0,231596	0,248168	0,250024
0,0005	0,231575	0,248145	0,250000

Tableau 4.1 – Test de convergence ponctuelle sur un voisinage de six points avec la perturbation d'angle (tableau extrait de [GS03]).

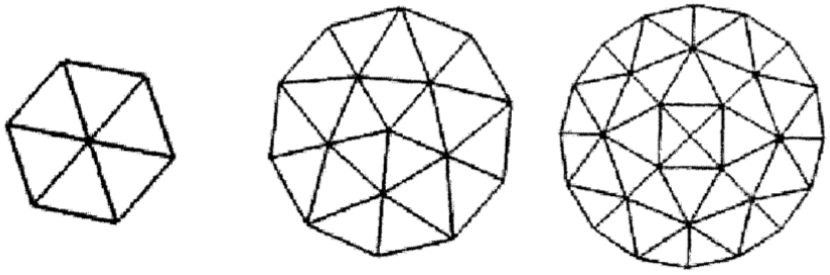
Ce test simple met en avant que la répartition spatiale d'un voisinage autour du point d'analyse peut induire des perturbations voire fausser certains estimateurs.

4.1.2 Le test de Gatzke et Grimm [GG06]

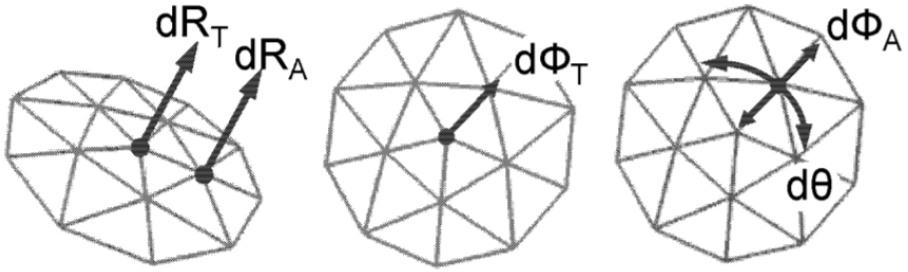
Gatzke et Grimm, au travers de [GG03] puis [GG06], proposent un autre test pour évaluer la sensibilité d'un ensemble d'estimateurs de courbure dont certaines variantes du *DCO*, de régression sur quadrique et de *Taubin*. Pour cela, ils définissent

un ensemble de paramètres de construction des schémas de discrétisation projetés sur une surface analytique. Ce schéma en étoile (cf. Figure 4.3(a)) est construit et perturbable (cf. Figure 4.3(b)) par un ensemble de paramètres, à savoir :

- n : le nombre de voisins au premier cercle,
- ϕ : la distance du premier voisinage,
- dR_T : le déplacement du sommet d'analyse sur la normale à la surface,
- dR_A : le déplacement d'un sommet voisin sur la normale à la surface,
- $d\Phi_T$: le déplacement du sommet d'analyse sur la surface,
- $d\Phi_A$: l'éloignement sur la surface d'un voisin par rapport au sommet d'analyse,
- $d\Theta$: l'angle de déplacement d'un voisin autour du sommet d'analyse.



(a) Exemples de voisinages construits avec différentes cardinalités au premier cercle et différents nombres de cercles [GG06]. La cardinalité du cercle $c_i + 1$ est égale à deux fois celle du cercle c_i.



(b) Schéma des paramètres de perturbation et bruits proposés par Gatzke et Grimm dans [GG06].

FIGURE 4.3 – Méthode de construction des voisinages dans l'expérience de Gatzke et Grimm.

Avec ces différents paramètres, ils peuvent mesurer, indépendamment, leurs impacts sur les estimateurs. Pour avoir un ensemble de modèles de voisinages suffisamment large, ils reprennent, tout comme ont pu le faire auparavant Cazals et

Pouget[CP03], les fonctions à deux variables de Hamann[Ham92] suivantes :

$$\text{Sphère} : z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$
$$\text{Cylindre} : \text{z} = \sqrt{2 - x^2}$$
$$\text{Paraboloïde elliptique} : z = 2x^2 + y^2$$
$$\text{Hyperboloïde} : z = 0,4(x^2 - y^2)$$
$$\text{Ellipsoïde} : z = \frac{\sqrt{1 - (x^2/3 + y^2/2)}}{4}$$
$$\text{Selle de singe } (\mathit{MonkeySaddle}) : z = 0,2(x^3 - 3xy^2)$$
$$\text{Polynomiale cubique} : z = 0,15(x^3 + 2x^2y - xy + 2y)$$
$$\text{Exponentielle} : z = e^{2x+y^2-y}$$
$$\text{Trigonométrique} : z = 0,1(\cos(\pi x) + \sin(\pi y))$$

La Figure 4.4 donne un exemple de voisinage construit et projeté sur chacune de ces fonctions.

Ce test est certes moins précis que celui proposé par Garimella et Swartz mais offre plus de paramètres de perturbation et de construction. Il permet également d'évaluer les estimateurs de courbure et de normale sur diverses surfaces analytiques.

4.2 Protocole expérimental

Notre expérimentation est basée sur des tests de convergence ponctuelle qui reprennent ceux de Garimella et Swartz et ceux de Gatzke et Grimm sur un ensemble de tests de convergence globale avec deux schémas de discrétisation offrant différents *aspect ratio*. La convergence d'un estimateur est importante car elle permet d'établir que son imprécision est directement liée à l'interpolation entre le point d'analyse et son voisinage.

4.2.1 Convergence ponctuelle

La convergence ponctuelle est un critère de non régression d'un estimateur sur un échantillonnage qui converge vers le point d'analyse.

Nous avons dans un premier temps reproduit l'expérience de Garimella et Swartz afin de confirmer son observation. Puis nous l'avons étendue à une sphère et ajouté d'autres schémas de discrétisation en créant d'autres perturbations. Ces tests exploratoires sont présentés par les Figures 4.5 et 4.6. Ils ont donné des résultats montrant que l'ensemble des estimateurs existants était sensible à l'ensemble des perturbations.

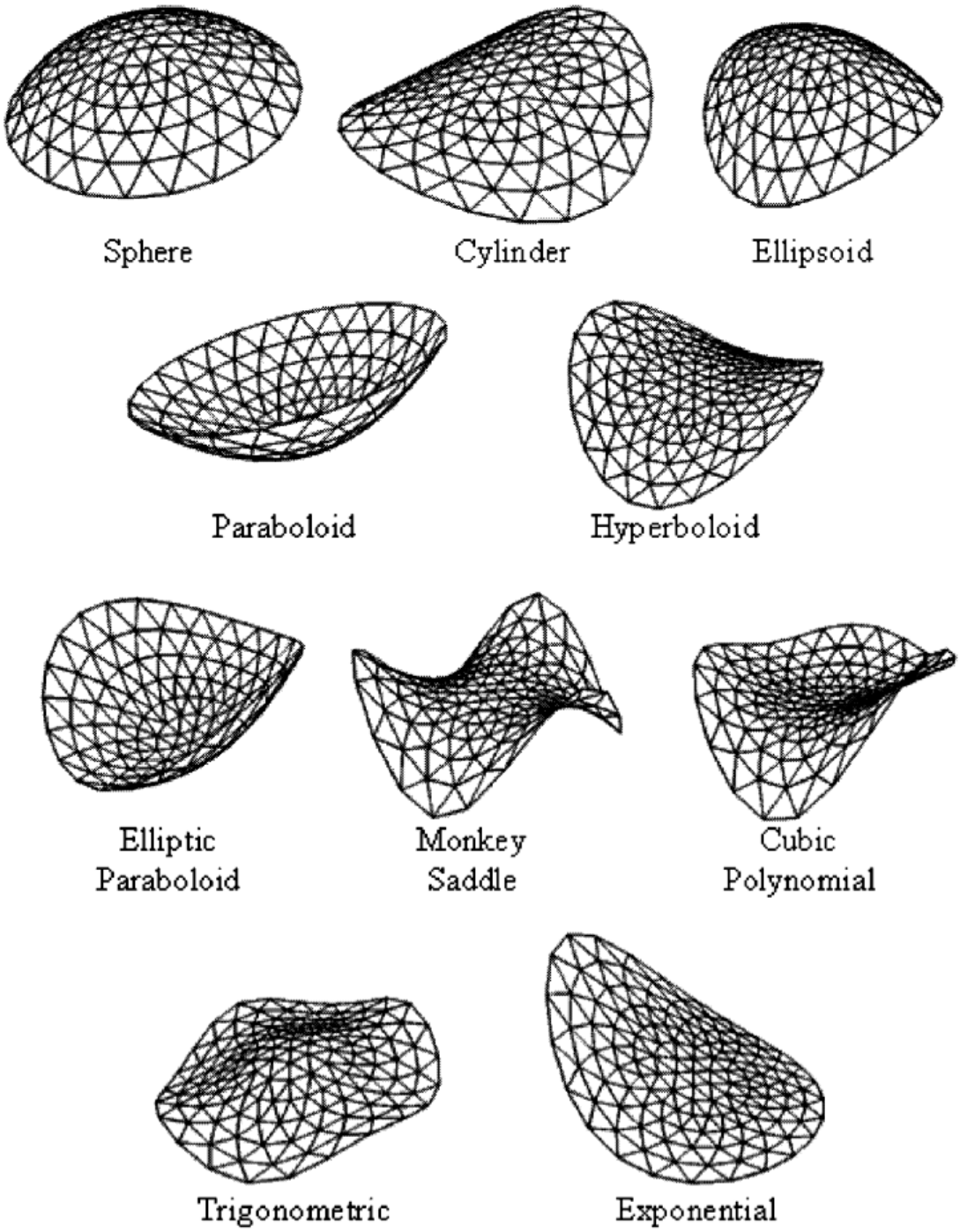
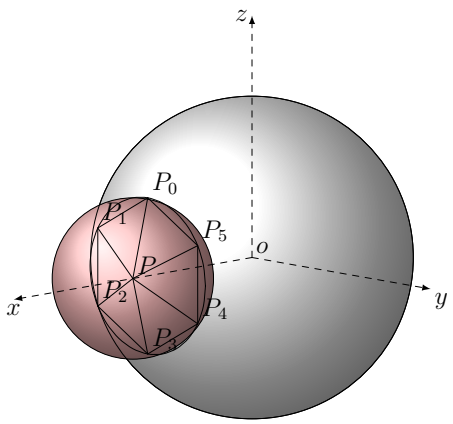
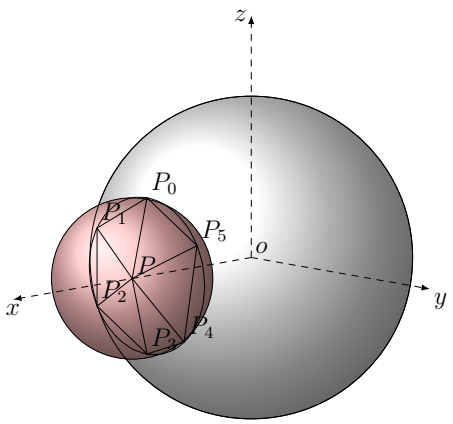


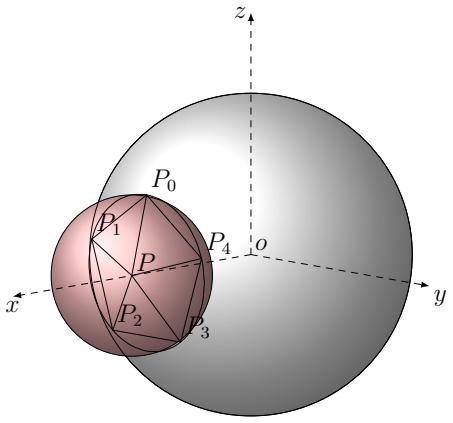
FIGURE 4.4 – Formes obtenues à partir des fonctions de Hamann (Figure extraite de [GG06]).



(a) Discrétisation régulière à 6 voisins.



(b) Discrétisation régulière à 6 voisins avec ajout d'une perturbation angulaire sur le sommet P_4.



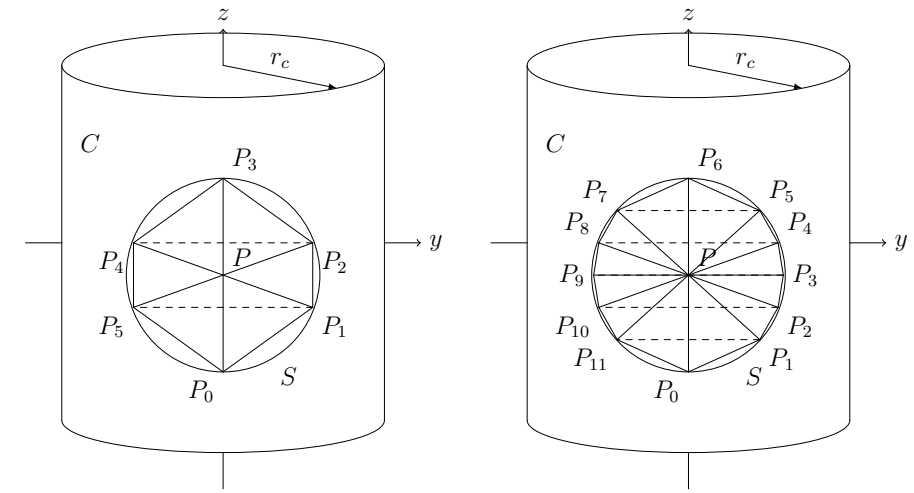
(c) Discrétisation régulière à 5 voisins.

Figure 4.5 – Application du test de Garimella et Swartz sur une sphère (en rouge la sphère d'intersection et en gris la surface de l'objet à analyser).

Nous avons alors dans un second temps fait évoluer nos expérimentations. À l'image de ce qu'ont fait Gatzke et Grimm, nous avons défini un ensemble des schémas de discrétisation applicable sur l'ensemble des fonctions de Hamann. Chaque schéma permet d'étudier séparément un paramètre de variabilité du voisinage. Cela nous permet de faire une meilleure mesure de l'influence des paramètres de construction de ce schéma en fonction de la surface analytique sous-jacente sur les différents estimateurs de courbure.

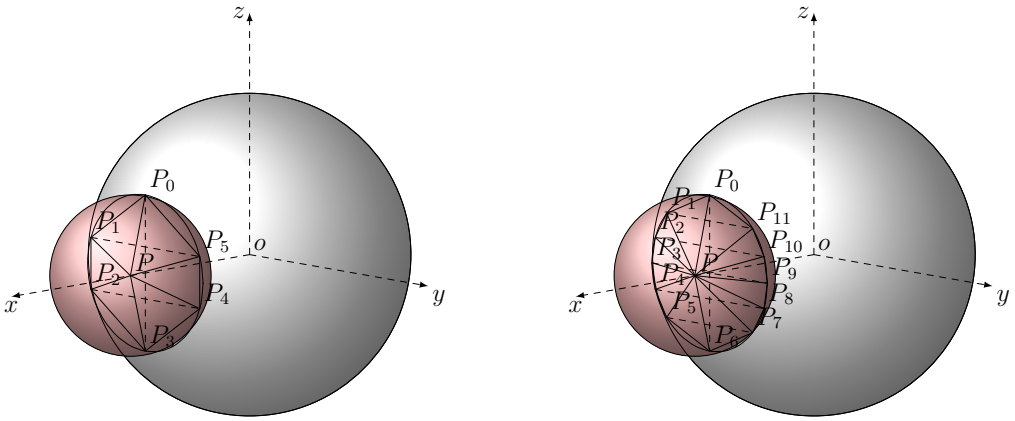
Nous avons repris les surfaces analytiques de Hamann et défini un ensemble de schémas projetés sur celles-ci. Ces schémas sont présentés sur la Figure 4.7. Ils se construisent selon une distance de discrétisation d et se décrivent comme suit :

– $\mathcal{NB}_R$: Voisinage régulier. Cette construction est faite par répartition d'un ensemble de n voisins autour de P à angle régulier (autrement dit $\frac{2\pi}{n}$) et à une distance d.



(a) Schéma obtenu sur la surface d'un cylindre avec 6 voisins.

(b) Schéma obtenu sur la surface d'un cylindre avec 12 voisins.



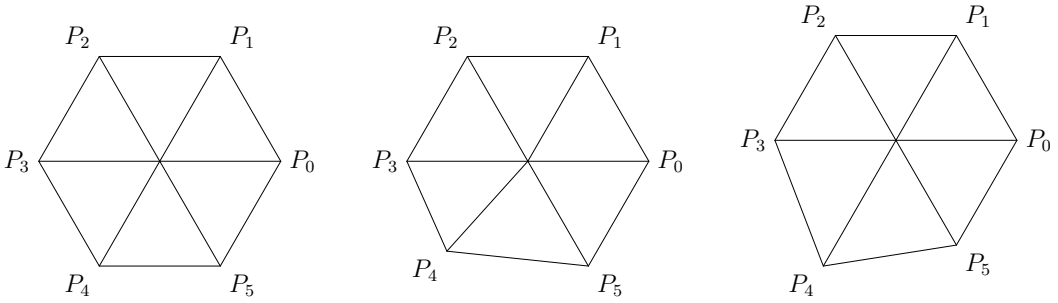
(c) Schéma obtenu sur la surface d'une sphère avec 6 voisins.

(d) Schéma obtenu sur la surface d'une sphère avec 12 voisins.

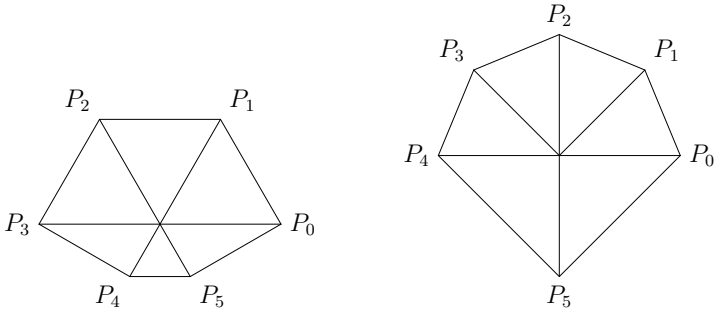
FIGURE 4.6 – Voisinages symétriques mais angles variants. Ce voisinage reprend le schéma de base de Garimella et Swartz à savoir faire l'intersection entre une surface analysée $\mathcal{F}$ et une sphère S qui définit la distance d'échantillonnage. Cette construction consiste à prendre comme base l'axe z. Pour construire un voisinage de cardinalité n, on subdivise le segment du diamètre sur cet axe en $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sous-segments identiques. On obtient ainsi $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ valeurs sur z et pour chacune d'elles on calcule les sommets de chaque côté de l'axe sur l'intersection entre S et $\mathcal{F}$.

- $\mathcal{NB}_{R\delta a}$: Voisinage régulier avec un angle perturbé. Sur le schéma du $\mathcal{NB}_R$, le voisin $P_{\frac{n}{2}+1}$ est perturbé par une rotation de $-0,2 \cdot \frac{2\pi}{n}$ autour de P.
- $\mathcal{NB}_{R\delta d}$: Voisinage régulier avec une distance perturbée. Sur le schéma du $\mathcal{NB}_R$, le voisin $P_{\frac{n}{2}+1}$ est perturbé par translation sur la direction du vecteur $\overrightarrow{PP}_{\frac{n}{2}+1}$ de longueur $0,2 \cdot d$.

- $\mathcal{NB}_{R\delta ds}$: Voisinage avec perturbation des distances sur sa moitié. Dans ce cas, tous les voisins dont l'indice est supérieur à $\frac{n}{2}$ sont translatés vers P de $\frac{d}{2}$.
- $\mathcal{NB}_U$: Voisinage non-équilibré. Le voisinage est réparti de part et d'autre de l'axe (PP_0) avec 80% d'un coté et 20% de l'autre.



(a) $\mathcal{NB}_R$: Voisinage régulier. (b) $\mathcal{NB}_{R\delta a}$: Voisinage régulier avec un angle perturbé. (c) $\mathcal{NB}_{R\delta d}$: Voisinage régulier avec une distance perturbée.



(d) $\mathcal{NB}_{R\delta ds}$: Voisinage avec perturbation des distances sur sa moitié. (e) $\mathcal{NB}_U$: Voisinage non-équilibré.

Figure 4.7 – Voisinages créés afin d'être projetés sur les surfaces de Hamann.

Pour chaque couple schéma et surface, nous réalisons un test de convergence en faisant varier d de $0,5$ à $0,0005$. Le résultat d'un test de convergence ponctuelle est présenté sous la forme d'un graphique avec pour abscisse la distance d et comme ordonnée, la valeur de la courbure ou la norme du vecteur résultant de la différence entre la normale calculée et la normale théorique (ce que l'on appellera l'erreur de la normale).

4.2.2 Convergence globale

La convergence globale (ou uniforme) est une condition plus exigeante que la convergence ponctuelle. Alors que la convergence ponctuelle nécessite que l'estimateur converge en un point, la convergence globale implique que l'estimateur converge en tous points.

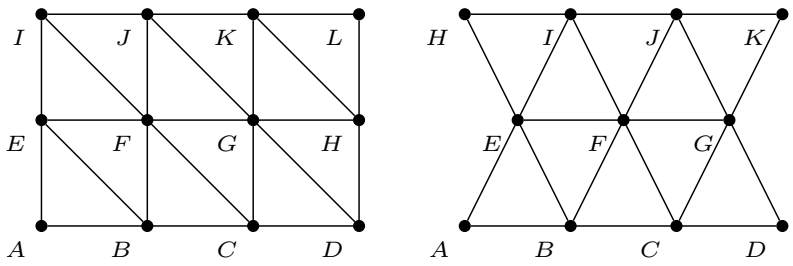
Pour réaliser ce test, nous avons défini deux schémas de discrétisation sur $\mathbb{E}$ un sous-espace fini de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{E}$, $x \in [-1; 1]$ et $y \in [-1; 1]$. La distance de discrétisation est donnée par le paramètre m par les valeurs successives 8, 16, 32, 64, 128 et on définit $d = 2/m$.

Le premier, appelé *SplitSquare* (cf. Figure 4.8(a)) consiste à créer un schéma régulier sur l'ensemble de la surface et à couper ces carrés en deux pour obtenir des triangles. Il en résulte un schéma avec des AR (Aspect Ratio) moyens (avant projection $AR = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$). Dans cette construction, un sommet V du schéma est défini par un numéro de ligne V_{ligne} et un numéro de colonne $V_{colonne}$. Ses coordonnées sont alors de la forme :

$$V_{(x,y)} = (V_{colonne} \cdot d - 1,\ V_{ligne} \cdot d - 1). \tag{4.4}$$

Le second, appelé *Sawtooth* (cf. Figure 4.8(b)) découpe l'ensemble de définition de l'échantillonnage en bandes régulières et construit des triangles en dents de scie entre chaque ligne. Ce schéma crée des triangles avec des AR plus proche de 1 (avant projection $AR = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,894$). Les lignes paires possèdent $m + 1$ sommets (2 étant la longueur de l'intervalle sur x et sur y de $\mathbb{E}$) et les lignes impaires en ont m. Ainsi un sommet de ce schéma est défini par son numéro de ligne V_{ligne} et son indice sur celle-ci $V_{l_{id}}$ et a des coordonnées de la forme :

$$V_{(x,y)} = ((V_{l_{id}} + \frac{(V_{ligne} \bmod 2)}{2}) \cdot d - 1,\ V_{ligne} \cdot d - 1). \tag{4.5}$$



(a) *SplitSquare* (b) *Sawtooth*

FIGURE 4.8 – Schémas de discrétisations globales.

À ces tests portés sur les discrétisations de fonctions de Hamann, nous avons ajouté des tests de convergence sur une *UV-Sphère* et un *UV-Cylindre* de rayon 2 sur lesquels il y a autant de méridiens que de parallèles. Soit m ce nombre, la convergence se fait par l'augmentation de m avec les valeurs successives suivantes : 8, 16, 32, 64 et 128. On obtient alors les modèles de la Figure 4.9.

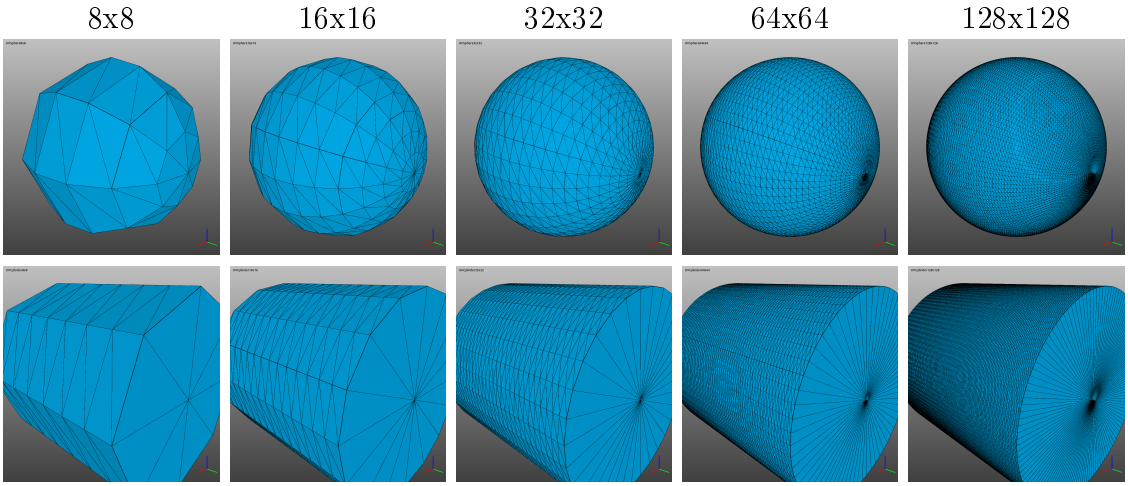


FIGURE 4.9 – Modèles *UV-Sphère* et *UV-Cylindre* à différentes distances d'échantillonnages.

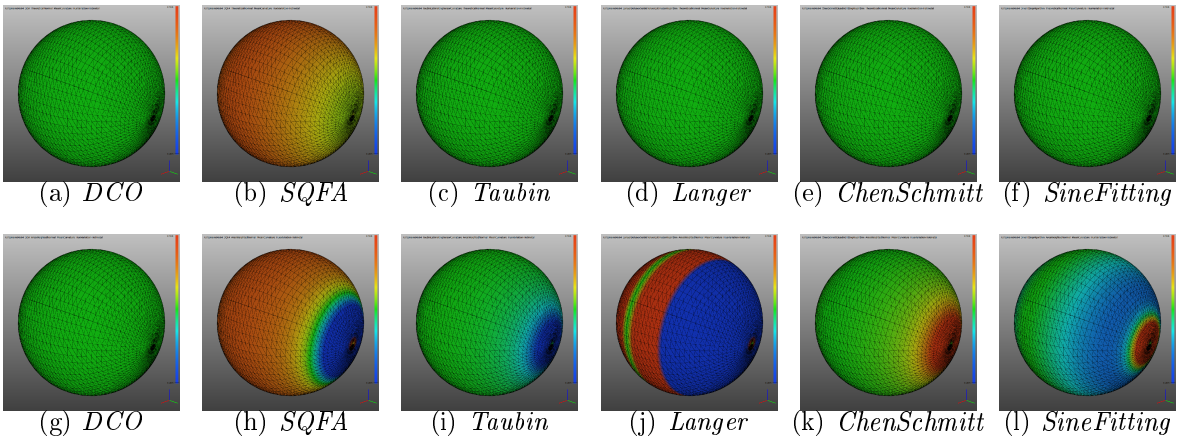
4.3 Résultats

En s'appuyant sur les tests de convergence ponctuelle dans un premier temps et sur les tests convergence globale dans un deuxième temps, nous allons observer les comportements des différents estimateurs en terme de précision, convergence et stabilité comme nous les avons décrits à la section 1.4.

4.3.1 Expérimentations sur la courbure

Dans cette partie, nous allons reprendre les estimateurs de courbure précédemment cités et pris comme représentants des différentes approches de l'état de l'art et les comparer à notre méthode *SineFitting*.

Les Figures 4.12 et 4.13 présentent les différents modèles discrétisés utilisés dans le test de convergence globale. Sur la première figure, les surfaces sont discrétisées par la méthode *SplitSquare* alors que sur la seconde la méthode utilisée est *Sawtooth*. Les Figures 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23 et 4.24 présentent sous forme de tableaux les tests de convergence ponctuelle. Ces tableaux sont structurés avec les méthodes de discrétisation en colonne et les surfaces analytiques en ligne. Ces figures donnent un échantillon représentatif des résultats des tests réalisés. Dans cette évaluation des estimateurs de courbure, nous utiliserons comme entrée la normale théorique. En effet, utiliser une normale calculée ajouterait un paramètre de variabilité non contrôlable et indissociable de celle de l'estimateur de courbure lui-même. Comme on peut le voir sur la Figure 4.10, exception faite du *DCO*, tous les estimateurs de courbure sont sensibles à une mauvaise estimation de la normale.



(a) *DCO* (b) *SQFA* (c) *Taubin* (d) *Langer* (e) *ChenSchmitt* (f) *SineFitting*

(g) *DCO* (h) *SQFA* (i) *Taubin* (j) *Langer* (k) *ChenSchmitt* (l) *SineFitting*

FIGURE 4.10 – Estimation de la courbure moyenne en utilisant la normale théorique pour les Figures (a) à (f) et la normale calculée par l'estimateur *AreaWeighted* pour les Figures (g) à (l). L'échelle de couleur est donnée en *HotMetal* sur l'intervalle $[0,499; 0,501]$. La valeur théorique de la courbure moyenne est homogène sur l'ensemble de la sphère et est dans ce cas $0,5$ ce qui correspond à la couleur verte.

DCO (Discret Curvature Operator : Opérateur de courbure discret)

Le *DCO* de Meyer [MLBD02] est précis sur les maillages réguliers comme le montrent les tests de convergence globale (cf. Figures 4.12 à 4.16). Cette précision sur un maillage régulier est également montrée par la première colonne des Figures 4.17 à 4.24. Mais comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 2, dans certaines configurations (cf. Figure 2.5) l'application de Gauss discrète peut être dégénérée. Cela fait que dans ces cas, l'estimateur ne converge plus comme on peut le voir sur les Figures 4.19 (sur la dernière ligne avec les discrétiseurs $\mathcal{NB}_{R\delta a}$ et $\mathcal{NB}_{R\delta d}$) et 4.20 (sur la première ligne avec le discrétiseur $\mathcal{NB}_{R\delta ds}$). Mais dans certaines configurations, il peut également devenir très erroné comme on peut le voir sur la Figure 4.23 (sur les lignes 1, 2 et 4 du discrétiseur $\mathcal{NB}_{R\delta d}$).

SQFA (SimpleQuadricFitting : Régression sur quadrique simple)

Pour les tests de convergence ponctuelle réalisés avec la normale théorique, le *SQFA* converge toujours vers la valeur théorique. De plus il se distingue comme étant le plus précis sur les surfaces *Exponentielle*, *Paraboloïde elliptique*, *Hyperboloïde* et *Trigonométrique* sur les tests de convergence ponctuelle. Mais il se distingue aussi comme étant le plus mauvais sur une sphère que ce soit sur le test de convergence ponctuelle ou globale et moins précis que *DCO*, *Langer*, *ChenSchmitt* et *SineFitting* sur le test de convergence globale de l'*UV-Cylindre*. Sur les tests de convergence ponctuelle, il est très stable aux perturbations des différents discrétiseurs sauf sur les surfaces *Polynomiale cubique* et *MonkeySaddle*.

Taubin

Par ses résultats sur le test de convergence ponctuelle, l'estimateur *Taubin* se montre comme étant très sensible aux perturbations de l'organisation du voisinage et converge dans la majeure partie des voisinages perturbés vers une valeur erronée. Ces manques de précision et de stabilité sont également visibles sur les Figures 4.12 et 4.13 avec l'*Hyperboloïde*, le *MonkeySaddle* et l'*UV-Cylindre* :

- sur le *MonkeySaddle* discrétisé avec la méthode *SplitSquare* la simple inversion du sens de l'étirement des triangles suffit pour inverser la valeur estimée,
- sur le *MonkeySaddle* discrétisé avec la méthode *Sawtooth* et l'*Hyperboloïde* discrétisé avec la méthode *SplitSquare* les amplitudes des courbures négatives sont sous-évaluées,
- sur l'*Hyperboloïde* discrétisé avec la méthode *Sawtooth* et l'*UV-Cylindre* toutes les courbures sont surévaluées quelque soit la distance de discrétisation.

Mais aussi, comme on peut l'observer sur la Figure 4.11 au travers de la courbure gaussienne sur la surface *Trigonométrique*, l'estimateur est instable aux orientations des dilatations de voisinage.

Langer

L'estimateur *Langer* converge toujours vers la valeur théorique avec une normale théorique en entrée. Il donne également des résultats précis et stables aux perturbation de voisinage sur l'ensemble des tests de convergence ponctuelle et globale. À l'exception près de la surface du *MonkeySaddle* où il montre une forte instabilité sur les axes d'inversion de variation de la courbure.

De plus, sur le test de convergence ponctuelle de cette même surface, il converge lentement vers la valeur théorique avec le discrétiseur $\mathcal{NB}_U$ et un voisinage de cardinalité 6. En observant la Figure 4.11 qui présente une discrétisation de la fonction *Trigonométrique*, on remarque qu'en deux points particuliers de la surface, il est moins précis que sur le reste du maillage.

ChenSchmitt

Sur les tests de convergence ponctuelle, *ChenSchmitt* ne converge pas ou converge vers une valeur erronée dans presque la moitié des cas. Ceci s'observe en particulier sur les surfaces *Polynomiale cubique* et *Cylindre* avec un voisinage de cardinalité 12.

Sur les tests de convergence globale, il donne des résultats très instables. Il est également très sensible aux variations de voisinage. Il se démarque comme étant le plus instable et le moins précis des estimateurs étudiés, ceci se retrouve tout particulièrement sur la Figure 4.11.

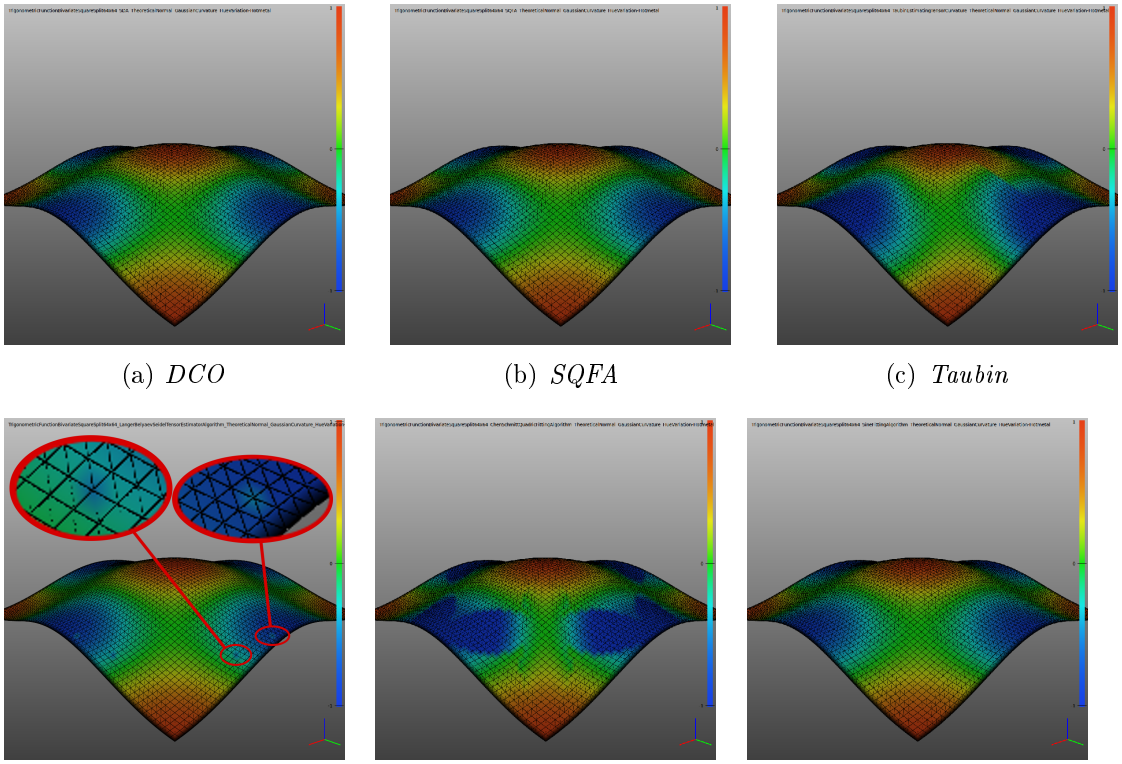
SineFitting

Sur l'ensemble des tests de convergence globale, la méthode *SineFitting* fait parti des estimateurs les plus précis que ce soit sur l'*UV-Sphère*, l'*UV-Cylindre* ou les fonctions de Hamann discrétisées par la méthode *SplitSquare* ou *Sawtooth*.

Sur l'ensemble des tests de convergence ponctuelle, la méthode *SineFitting* :

- converge toujours vers la valeur théorique ;
- bien qu'elle ne soit pas toujours la plus rapide, comme on peut le voir sur les surfaces *Exponentielle*, *Paraboloïde elliptique* et *Trigonométrique*, elle fait partie, en moyenne, de celles qui convergent le plus vite sur l'ensemble des tests réalisés ;
- est la méthode la plus stable au perturbation du voisinage. Cette stabilité est particulièrement visible sur les surfaces *Polynomiale cubique* et *MonkeySaddle*.

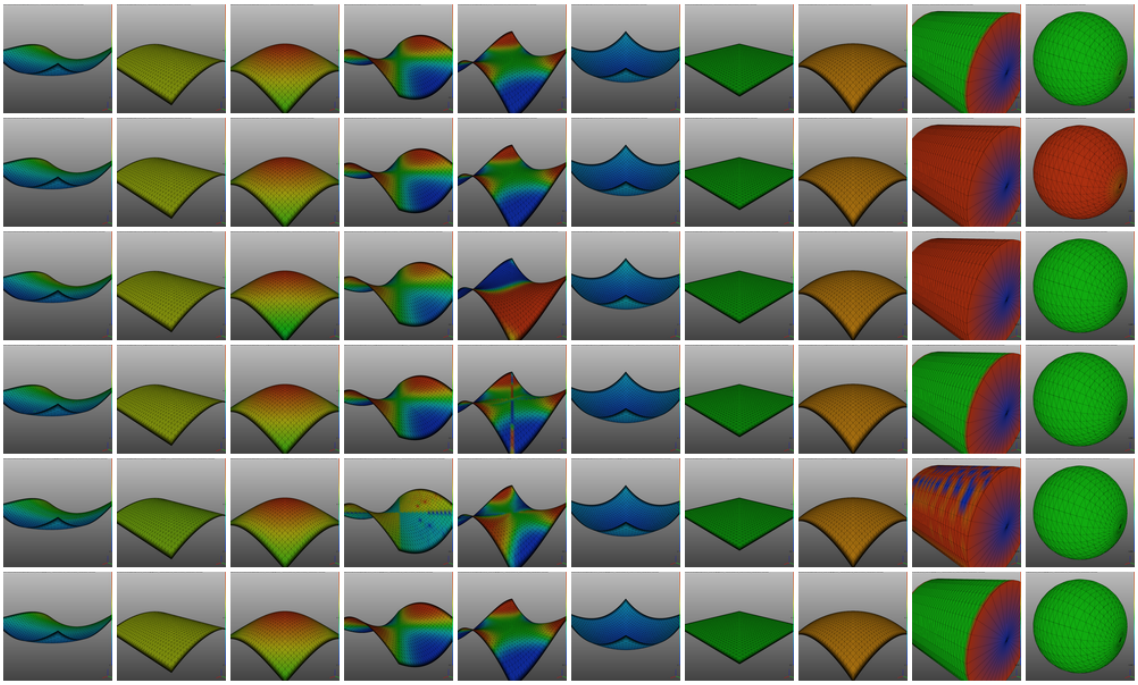
Au final, elle donne des résultats aussi bons que le *DCO* sur les tests de convergence globale tout en étant aussi précis et stable que les autres méthodes et en particulier la méthode *SQFA* sur les tests de convergence locale.



(a) *DCO* (b) *SQFA* (c) *Taubin*

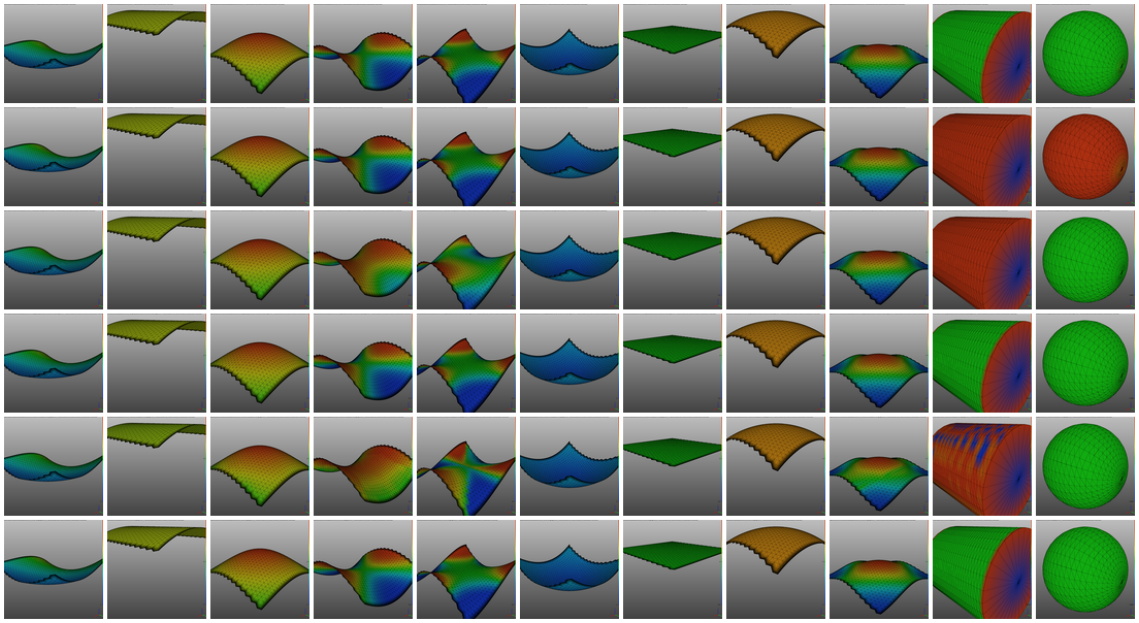
(d) *Langer* (e) *ChenSchmitt* (f) *SineFitting*

FIGURE 4.11 – Rendu en couleurs de la courbure gaussienne calculée par les différents estimateurs sur une discrétisation *SplitSquare* de la fonction *Trigonométrique*. La mise en couleur de la courbure gaussienne est sur l'échelle de couleurs *HotMetal* sur l'intervalle $[-1; 1]$.



Sur les colonnes, les différentes fonctions et sur les lignes, les méthodes :
(1) *DCO*, (2) *SQFA*, (3) *Taubin*,
(4) *Langer*, (5) *ChenSchmitt* et (6) *SineFitting*.

Figure 4.12 – Résultats des tests de convergence globale des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions avec le discrétiseur *SplitSquare* ainsi que sur l'*UV-Cylindre* et l'*UV-Sphère*, pour une distance d'échantillonnage due à une grille de construction de 32x32. La mise en couleur de la courbure moyenne est sur l'échelle de couleurs *HotMetal* sur l'intervalle $[-1; 1]$ sur les fonctions discrétisées par *SplitSquare*, sur l'intervalle $[0,249; 0,251]$ pour le cylindre et sur l'intervalle $[0,499; 0,501]$ pour la sphère.



Sur les colonnes, les différentes fonctions et sur les lignes, les méthodes :
(1) *DCO*, (2) *SQFA*, (3) *Taubin*,
(4) *Langer*, (5) *ChenSchmitt* et (6) *SineFitting*.

FIGURE 4.13 – Résultats des tests de convergence globale des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions avec le discrétiseur *Sawtooth* ainsi que sur l'*UV-Cylindre* et l'*UV-Sphère*, pour une distance d'échantillonnage due à une grille de construction de 32x32. La mise en couleur de la courbure moyenne est sur l'échelle de couleurs *HotMetal* sur l'intervalle $[-1; 1]$ sur les fonctions discrétisées par *SplitSquare*, sur l'intervalle $[0,249; 0,251]$ pour le cylindre et sur l'intervalle $[0,499; 0,501]$ pour la sphère.

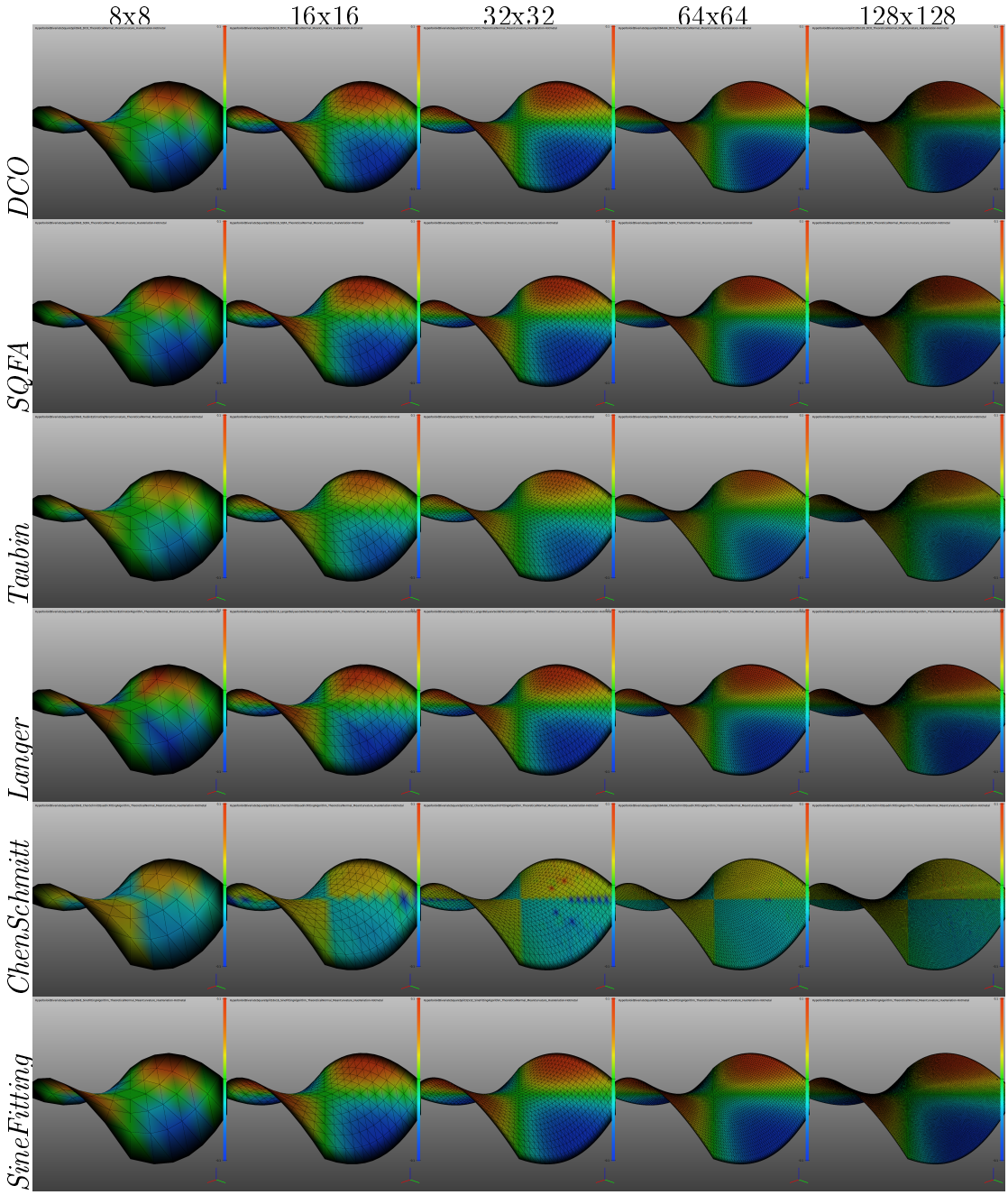


Figure 4.14 – Résultats du test de convergence globale des estimateurs de courbure sur l'*Hyperboloïde* discrétisée en *SplitSquare* pour des quadrillages allant de 8x8 à 128x128. La mise en couleur de la courbure moyenne est sur l'échelle de couleur *HotMetal* sur l'intervalle $[-1; 1]$.

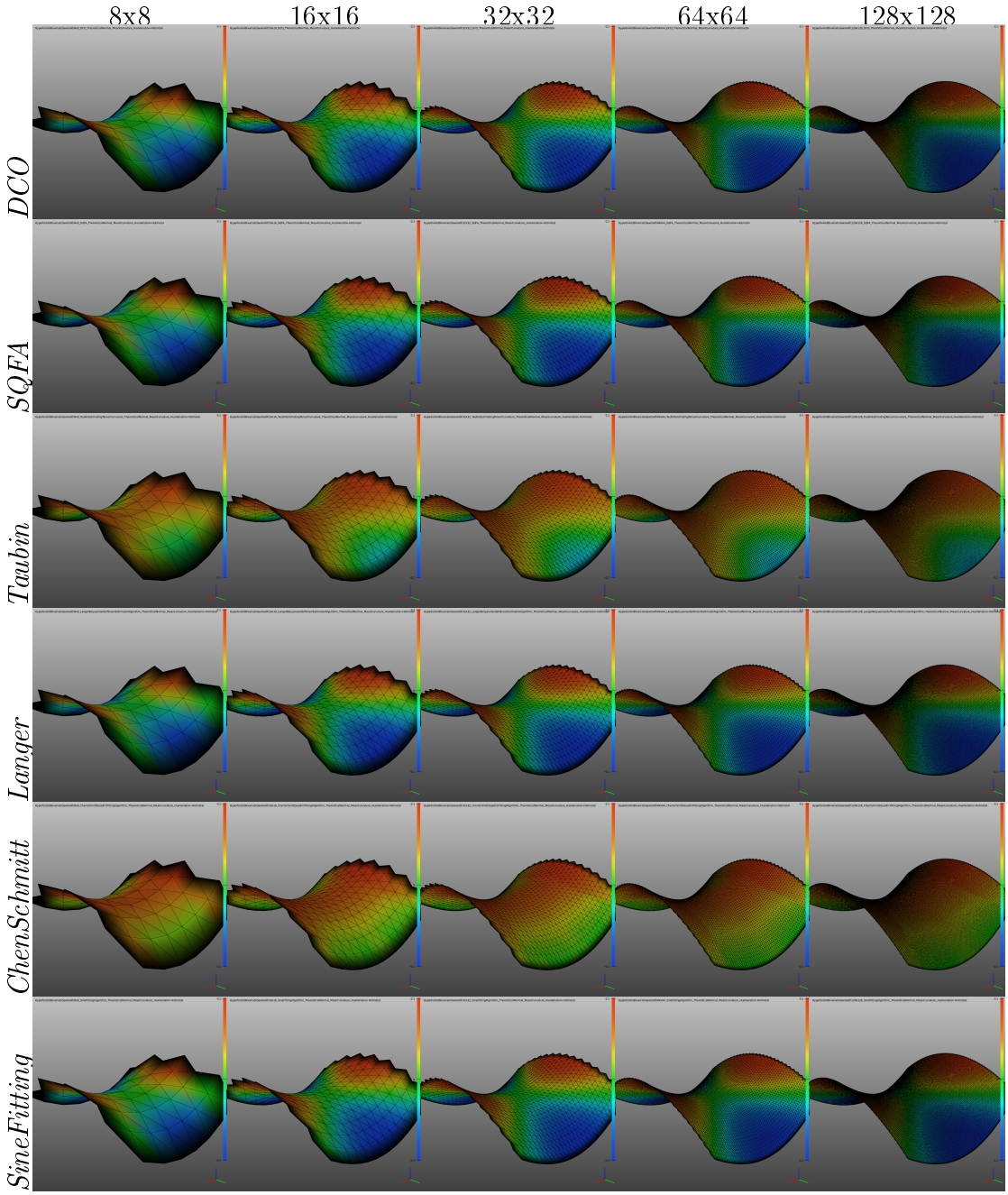


FIGURE 4.15 – Résultats du test de convergence globale des estimateurs de courbure sur l'*Hyperboloïde* discrétisée en *Sawtooth* pour des quadrillages allant de 8x8 à 128x128. La mise en couleur de la courbure moyenne est sur l'échelle de couleur *HotMetal* sur l'intervalle $[-1; 1]$.

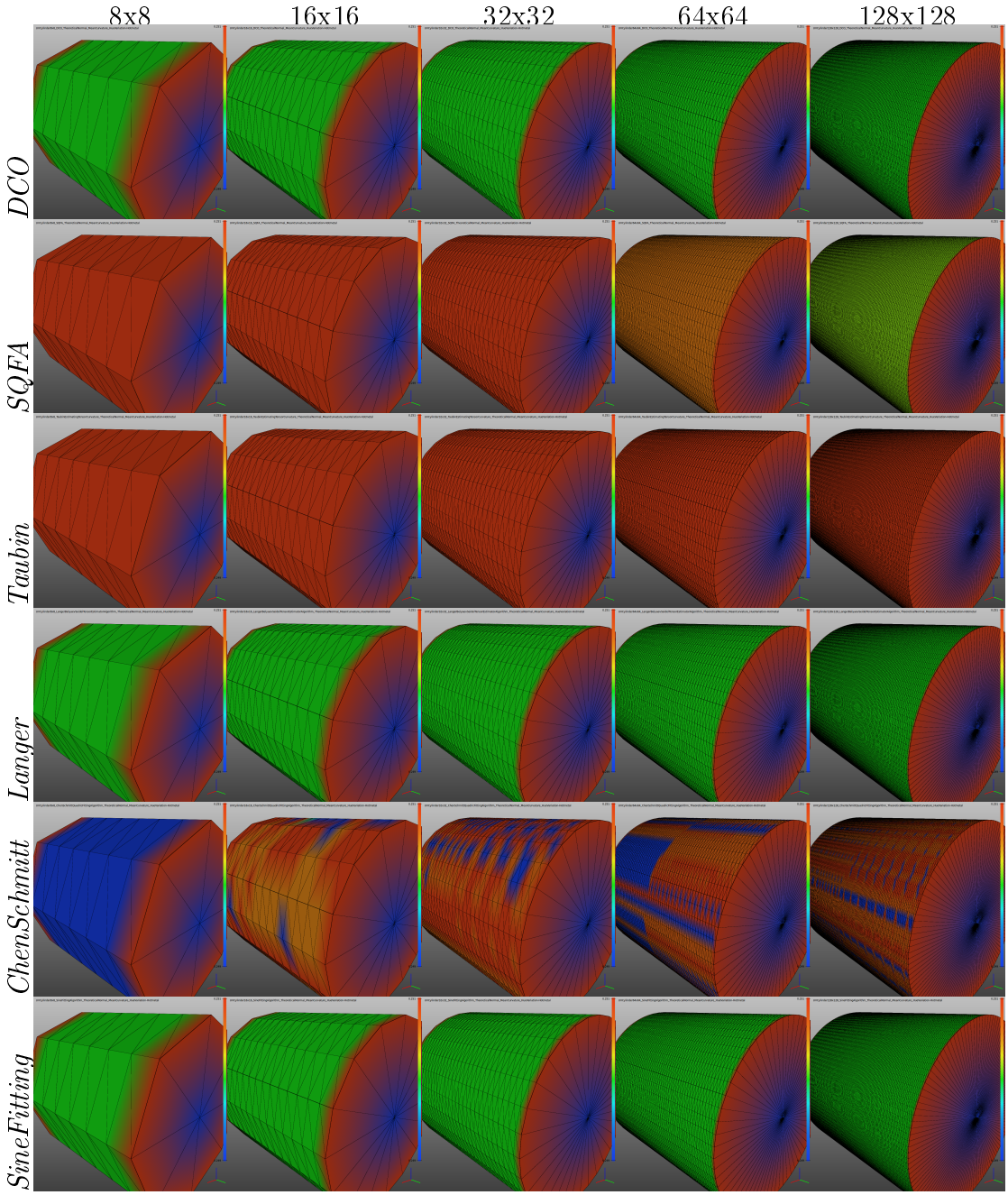


Figure 4.16 – Résultats du test de convergence globale des estimateurs de courbure sur un cylindre discrétisé en méridiens et parallèles pour des segments allant de 8x8 à 128x128. La mise en couleur de la courbure moyenne est sur l'échelle de couleur *HotMetal* sur l'intervalle $[0,249; 0,251]$.

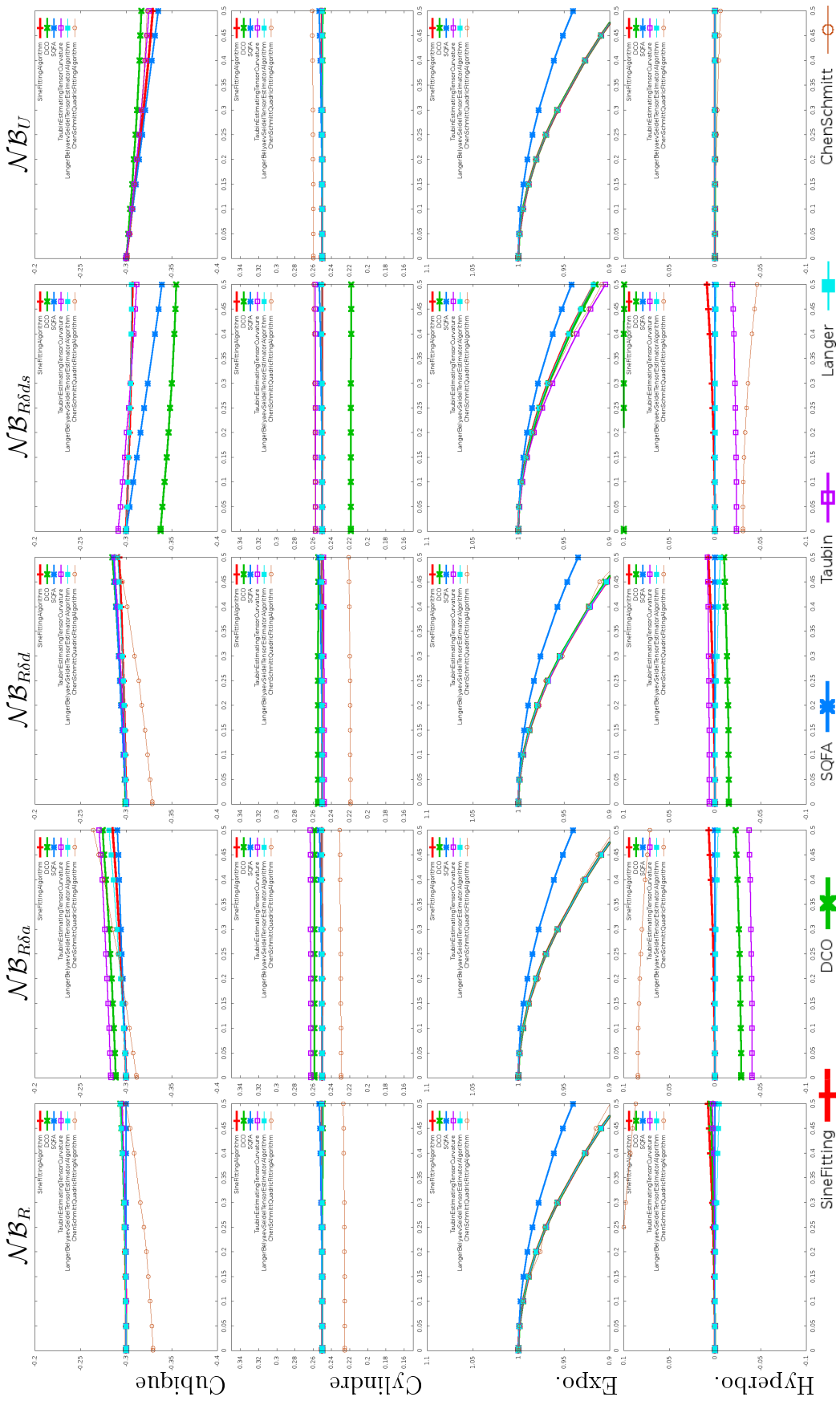


FIGURE 4.17 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,1** et une valence de voisinage de 6.

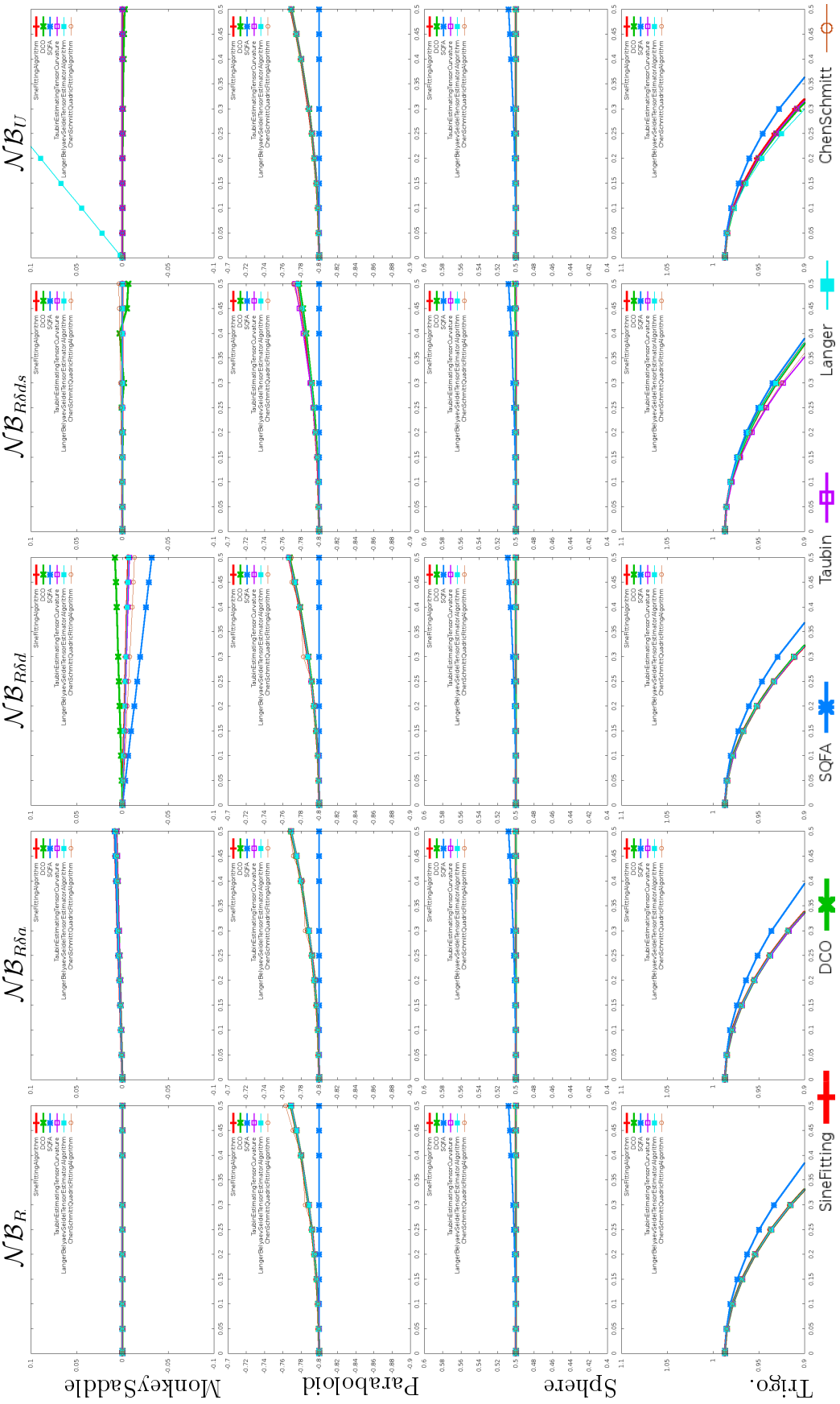


FIGURE 4.18 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,1** et une valence de voisinage de 6.

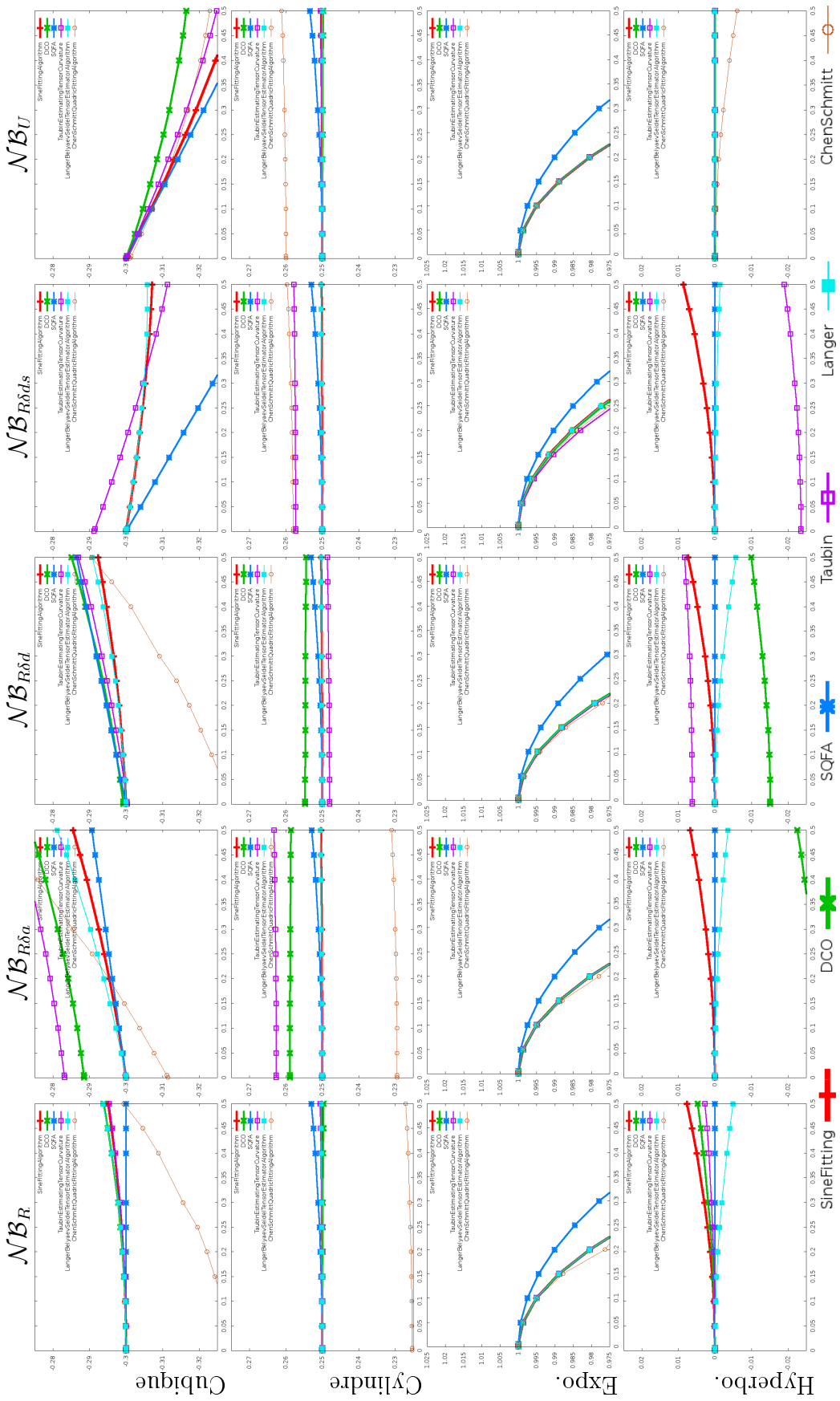


FIGURE 4.19 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,025** et une valence de voisinage de 6.

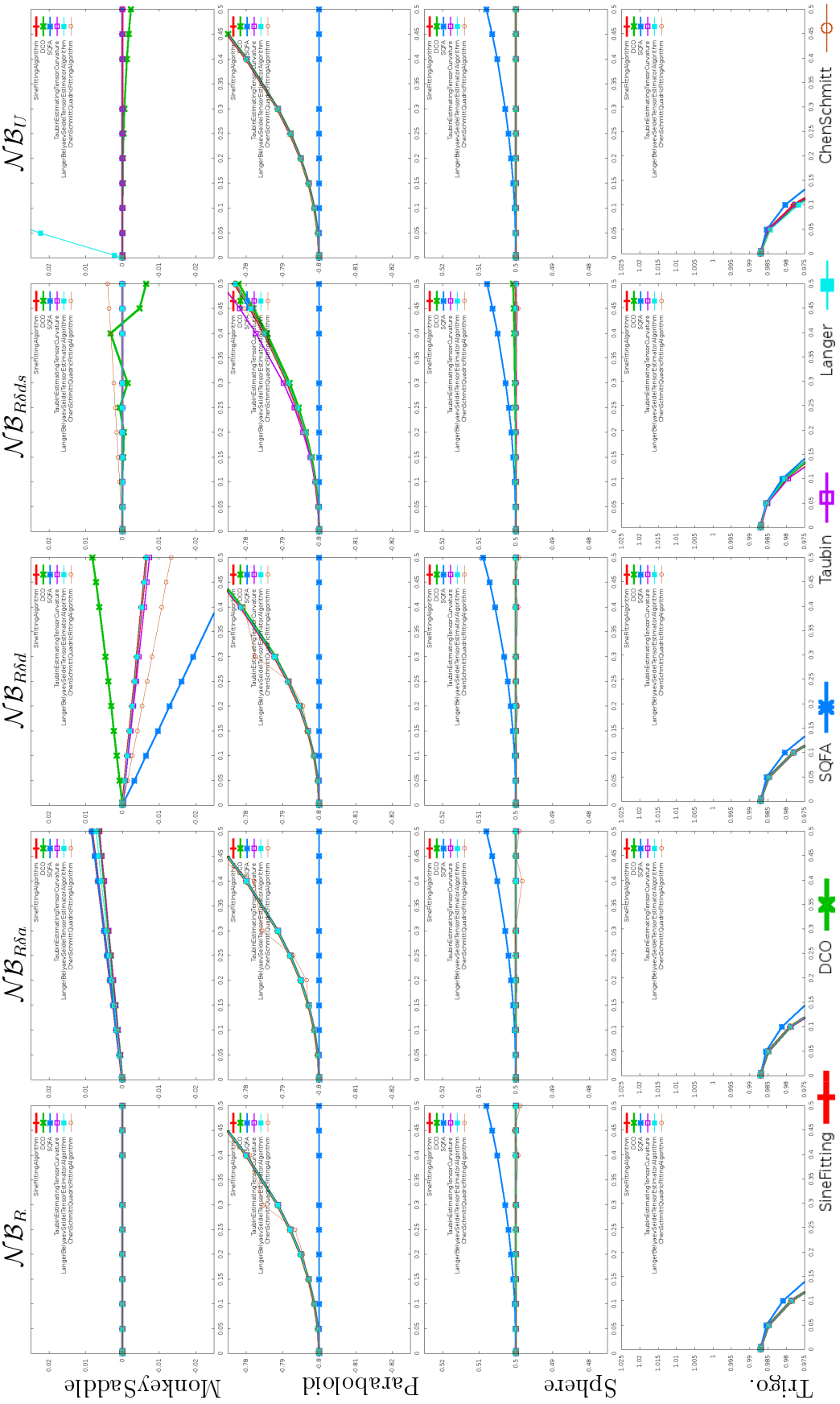


FIGURE 4.20 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,025** et une valence de voisinage de 6.

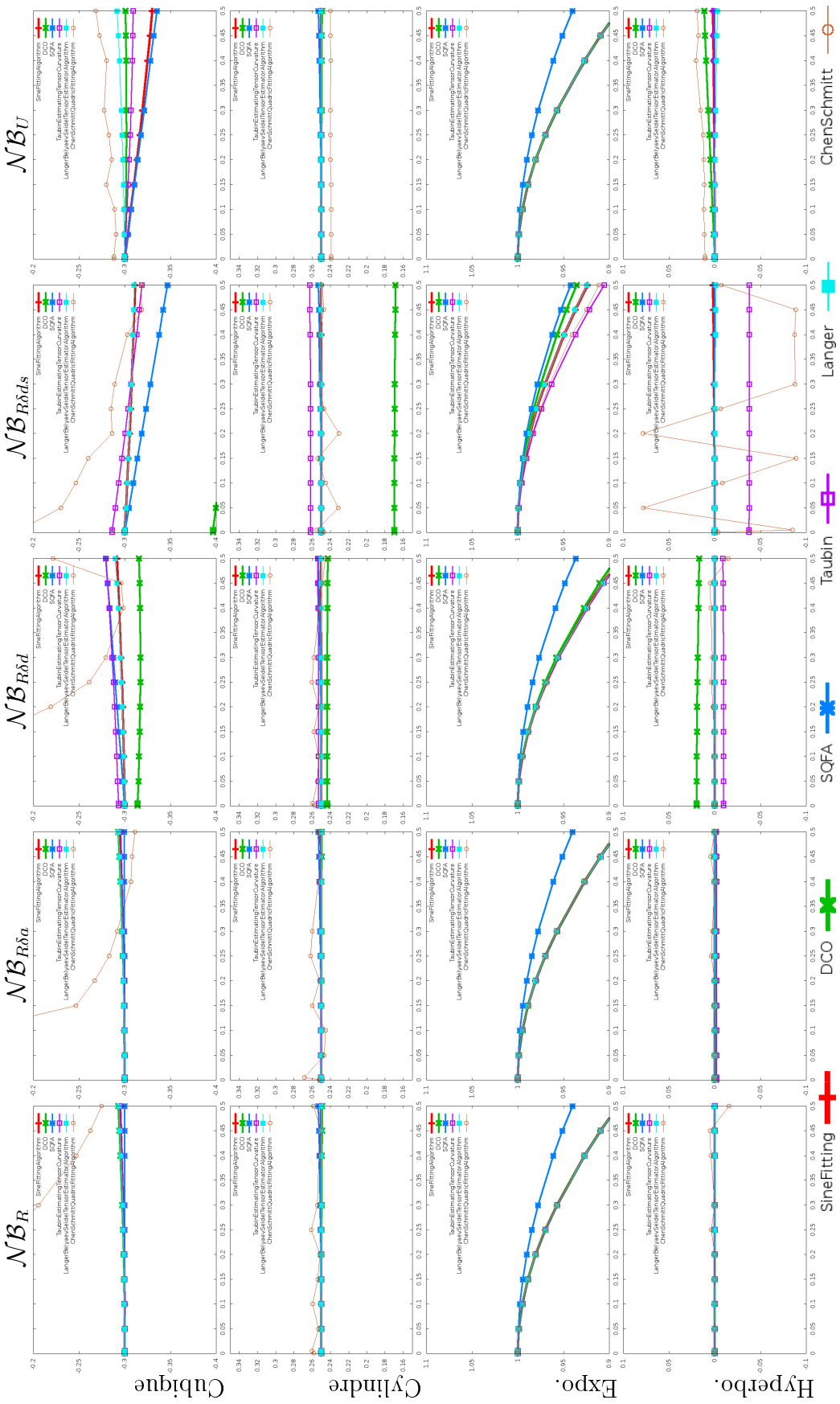


FIGURE 4.21 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,1** et une valence de voisinage de 12.

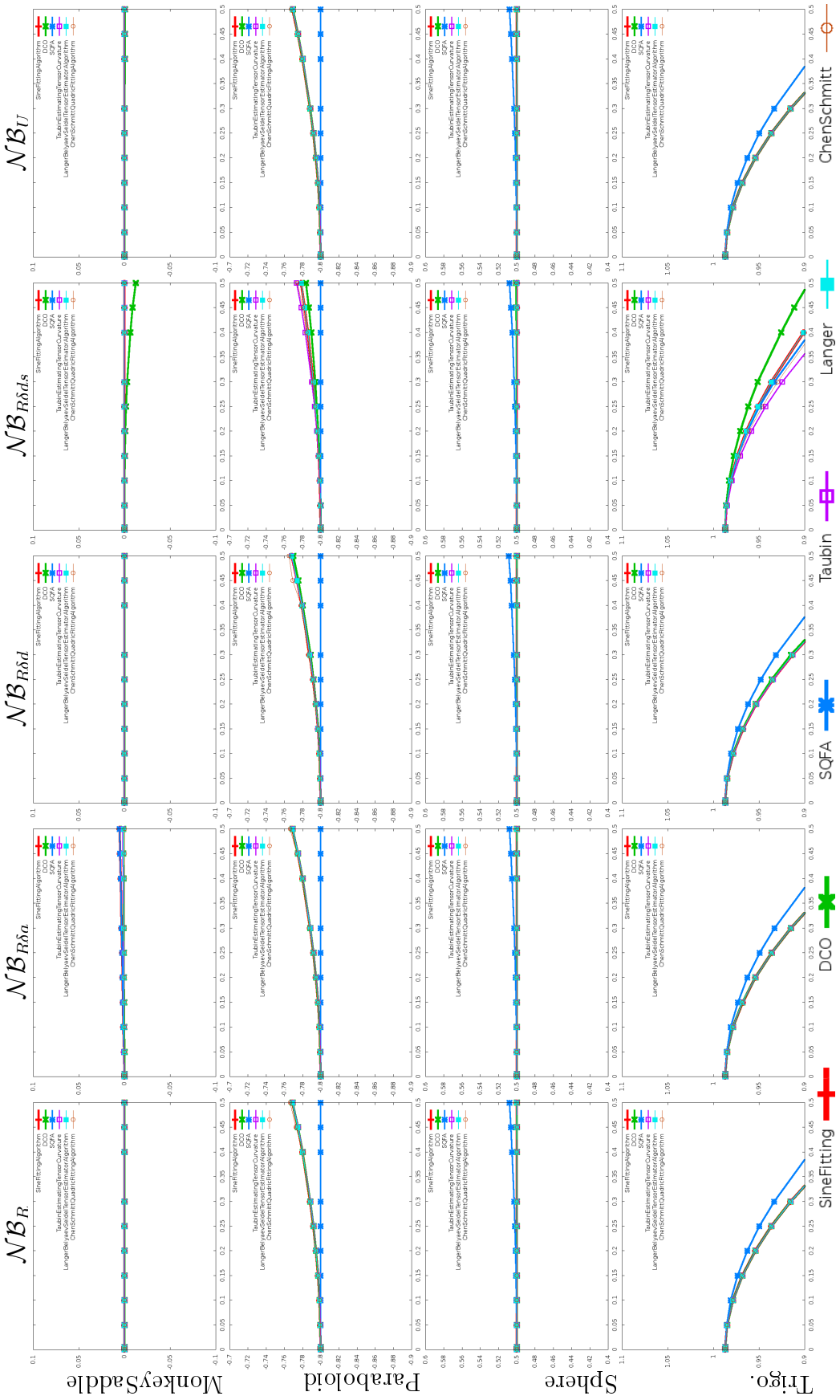


FIGURE 4.22 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,1** et une valence de voisinage de 12.

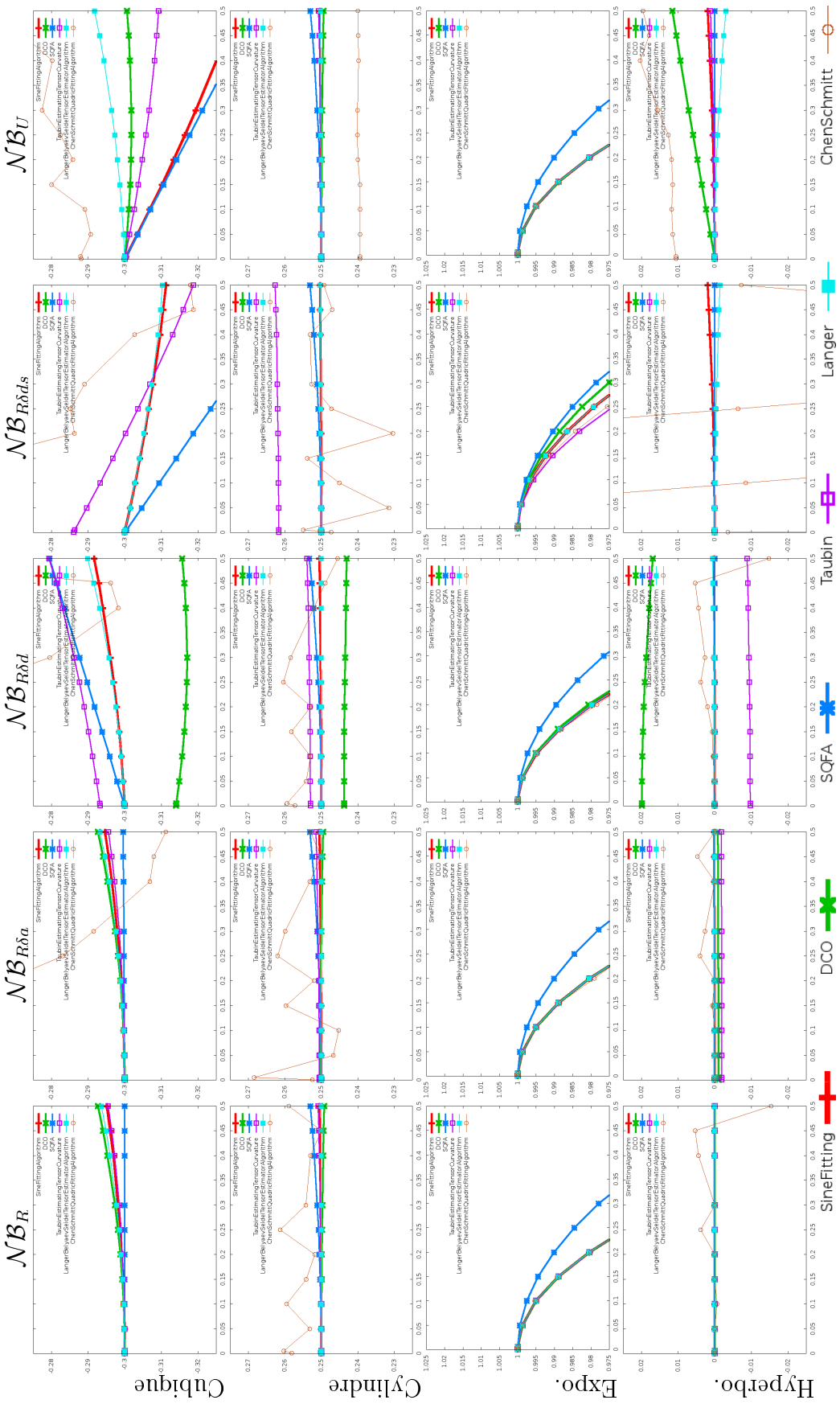


FIGURE 4.23 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,025** et une valence de voisinage de 12.

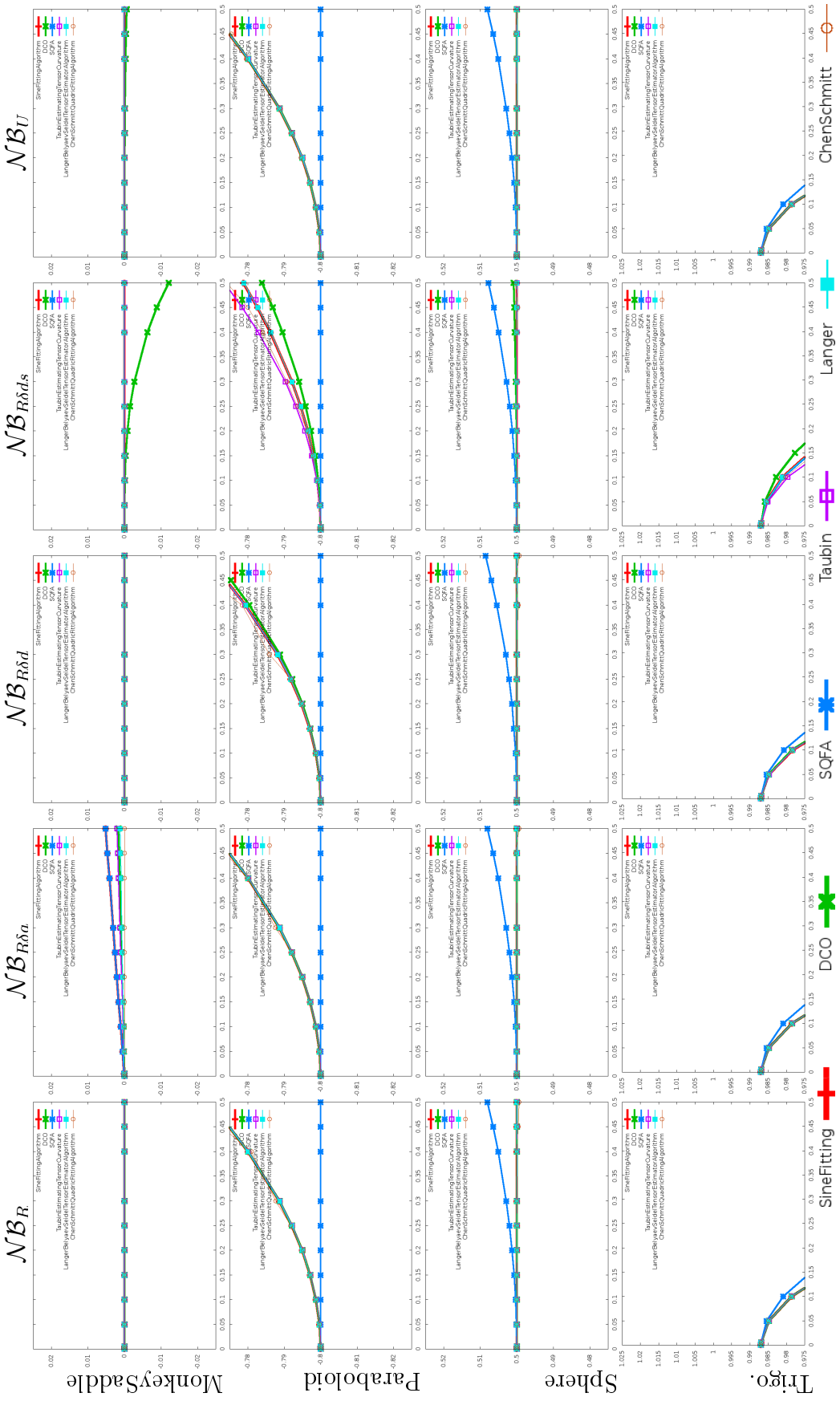


FIGURE 4.24 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de courbure sur l'ensemble des fonctions étudiées pour la courbure moyenne, avec une amplitude d'erreur de **0,025** et une valence de voisinage de 12.

Bilan sur les estimateurs de courbure

En reprenant les différents critères de comparaison sur l'ensemble des tests réalisés, il en ressort, comme illustré sur le tableau 4.25, que concernant :

- la précision : tous les estimateurs donnent des résultats précis sur des surfaces sans inversion de courbure avec une discrétisation régulière. Mais *Taubin* et *ChenSchmitt* sont moins précises sur les surfaces avec inversion de courbure comme l'*Hyperboloïde* et le *MonkeySaddle*. La méthode *DCO* donne de bons résultats sur la majeure partie des tests globaux avec la courbure moyenne mais donne de moins bons résultats sur la courbure gaussienne de l'*UV-Sphère* ou sur l'ensemble des tests de convergence ponctuelle. La méthode *Langer* montre ses limites sur les tests de convergence globale. En certains points, elle donne des estimations très erronées. Par exemple sur la courbure gaussienne pour la fonction *Trigonométrique* et la fonction *Polynomiale cubique* et sur la courbure moyenne sur la fonction *MonkeySaddle* discrétisée par la méthode *SplitSquare*, la méthode *SQFA* est imprécise sur les *UV-Sphère* et *UV-Cylindre*. Enfin la méthode *SineFitting* reste la méthode la plus précise sur les tests réalisés.
- la convergence : la méthode *ChenSchmitt* ne converge pas dans quasiment la moitié des cas. La méthode *DCO* ne converge pas dans certains cas comme nous l'avons déjà vu dans [GS03] et retrouvé sur les tests de convergence ponctuelle sur la surface *Polynomiale cubique*. Les autres méthodes convergent toujours même si c'est vers une valeur erronée. Mais la méthode *Langer* présente certains cas de convergence lente en particulier sur les tests de convergence ponctuelle avec le discrétiseur $\mathcal{NB}_U$. Les méthodes restantes donnent des résultats équivalents.
- la stabilité aux perturbations du voisinage : la méthode *ChenSchmitt* est la plus instable de celles comparées ici. Ensuite vient la méthode *DCO* qui donne des valeurs très erronées sur les tests avec perturbation des distances ($\mathcal{NB}_{R\delta ds}$) et *Taubin* qui est sensible au changement de voisinage particulièrement sur les surfaces *Polynomiale cubique*, *Hyperboloïde* et *Cylindre*. Des méthodes restantes, la méthode *SineFitting* est en moyenne la moins sensible aux variations du voisinage.

Au final, la méthode *SineFitting*, sur les tests réalisés, ressort comme étant la méthode la plus précise et la plus stable, suivie par la méthode *SQFA*.

Méthodes	(A)	(B)	(C)	(D)	Complexité
DCO	$+$	$-$	$--$	*non*	$O(n)$
SQFA	$++$	$++$	$++$	*oui*	$O(n^2)$
Taubin	$--$	$++$	$+$	*oui*	$O(n^2)$
Langer	$++$	$+$	$++$	*oui*	$O(n^2)$
ChenSchmitt	$--$	$---$	$---$	*oui*	$O(n^2log(n))$
SineFitting	$+++$	$++$	$+++$	*oui*	$O(n^2)$

(A) Précision, (B) Convergence
(C) Stabilité aux variations de la répartition spatiale du voisinage
(D) Passage au nuage de points

Figure 4.25 – Tableau de comparaison des méthodes d'évaluation de Courbure (l'échelle d'évaluation va de $---$ à $+++$).

4.3.2 Expérimentations sur la normale

[KAWB09] propose, dans un état de l'art sur les estimateurs de normale, un comparatif sur les critères suivants : complexité en temps, précision, montée en charge de la taille du voisinage analysé et robustesse des estimateurs de normale. Nous avons repris ici les estimateurs de normale suivants : *PlaneSVD* que nous appelons *PlaneFitting*, *AreaWeighted* et *QuadTransSVD* que nous appelons *ExtendedQuadricFitting*. Nous avons sélectionné ces derniers car ils sont couramment utilisés comme entrée par les estimateurs de courbure précédemment évalués. Enfin nous avons ajouté l'estimateur *ChenSchmitt* qui est la première phase de l'évaluateur des propriétés différentielles dans [CS92]. Nous confrontons ces différents estimateurs entre eux et à la méthode que nous proposons : l'*ExtendedSineFitting*. Un échantillon représentatif des résultats est donné par les Figures 4.26 à 4.36.

PlaneFitting (Régression sur un plan)

La régression sur un plan est une méthode simple, rapide et précise sur un voisinage régulier comme on peut le voir sur les Figures 4.28(a) et 4.28(b). Mais l'observation de l'ensemble des résultats montre que la moindre variation d'angle, de distance ou toute autre perturbation créant une dissymétrie dans le voisinage, même avec un voisinage dense (12 voisins), provoque une perte de précision de cet estimateur. Cette instabilité se retrouve sur tous les tests de convergence ponctuelle, mais aussi sur les tests de convergence globale. Cette instabilité est principalement visible sur les points de changement de sens de la courbure.

Toutefois, la méthode *PlaneFitting* converge toujours même si la valeur de convergence n'est pas toujours la valeur théorique. De plus, elle est applicable sur un nuage de points de forte densité.

AreaWeighted (Pondération des aires)

La méthode de moyennage pondéré par la surface des triangles voisins ressort comme la plus précise des méthodes par moyennage dans [KAWB09]. Elle donne de très bons résultats sur les tests de convergence globale comme sur l'*Hyperboloïde* et le *Paraboloïde elliptique* tout comme la méthode *PlaneFitting*. Cependant elle montre ses limites sur les tests de convergence ponctuelle. Par exemple, sur ces mêmes fonctions, une simple variation de la distance d'un des sommets du voisinage induit une forte perte de précision. Sur l'*UV-Sphère*, comme on peut le voir à la Figure 4.27, elle donne un résultat quasiment 10 fois supérieur à la méthode *PlaneFitting* avec une précision de l'ordre de 10^{-2} mais reste bien en deçà des autres estimateurs sur ce modèle.

ExtendedQuadricFitting (Régression sur quadrique étendue)

La méthode de régression sur quadrique étendue montre une forte robustesse aux variations d'angle et de distance sur les fonctions modélisables par une fonction quadratique. Elle reste moins robuste sur les autres : par exemple, sur les tests de convergence sur une *Polynomiale cubique*, sur l'*Exponentielle* et tout particulièrement sur le *MonkeySaddle*. De plus, le test de convergence globale sur l'*UV-Sphère*, qui a la caractéristique d'avoir des faces allongés vers les pôles, montre bien que l'*ExtendedQuadricFitting* est très sensible à l'organisation spatiale du voisinage.

ChenSchmitt

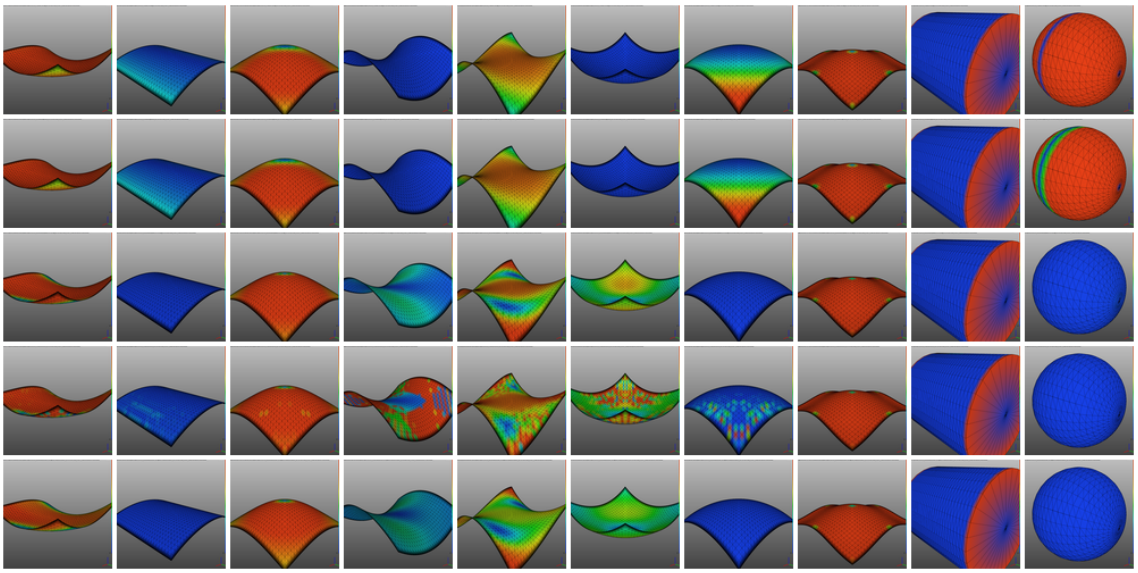
À l'encontre de la méthode *ExtendedQuadricFitting*, la méthode *ChenSchmitt* montre des résultats parfaits sur le test de convergence globale sur l'*UV-Sphère*. Toutefois, les résultats de cet algorithme sur la quasi-totalité des fonctions à deux variables (exception faite du plan) montrent une forte instabilité de la méthode. Les tests de convergence ponctuelle montrent également cette instabilité. Ces perturbations ne sont pas tant dues à la surface sous-jacente qu'à la méthode qui fait un tri sur les triplets utilisés dans l'évaluation de la surface. Rappelons que cette méthode crée l'ensemble des triplets possibles sur un voisinage donné. Ces triplets sont composés du point d'analyse et de deux sommets du voisinage et sont triés par ordre décroissant d'opposition. Enfin la méthode ne prend qu'un sous-ensemble de ces triplets qui sert à évaluer les tangentes puis la normale. Finalement, la méthode choisit un sous-ensemble de tangentes sur le critère d'opposition des triplets mais ne prend pas en compte l'occupation angulaire des tangentes calculées à partir de ceux-ci. Aussi suivant certains cas l'évaluateur a une forte variabilité suivant le choix de ces données.

ExtendedSineFitting (Régression sur sinusoïde étendue)

La méthode itérative de correction d'erreur par régression sur sinusoïde étendue, bien que nécessitant plus d'itérations que les autres méthodes :

- donne des résultats plus précis et/ou plus stables que les autres méthodes comme on peut le voir sur les Figures 4.27 et 4.28 et en moyenne sur les tests de convergence ponctuelle. Elle n'est pas toujours la meilleure. En effet, dans certains cas comme sur les surfaces *MonkeySaddle* et *Trigonométrique* avec le discrétiseur $\mathcal{NB}_{R\delta a}$ où la méthode *AreaWeighted* est meilleure ou dans le cas de la surface *Hyperboloïde* avec les discrétiseurs $\mathcal{NB}_{R\delta a}$ et $\mathcal{NB}_U$. Mais ces différences et le nombre d'exemples sont faibles. Alors que dans le reste des cas, elle donne les meilleures précisions et souvent avec de grands écarts.
- est moins sensible aux perturbations de voisinage comme on peut le voir par une lecture ligne par ligne sur l'ensemble des tests de convergence ponctuelle. Pour toutes les perturbations (angle, distance ou asymétrie) dans le voisinage,

elle converge toujours vers la valeur théorique et cette courbe de convergence ne varie que peu en fonction des perturbations apportées.
– converge avec un facteur qui, en moyenne, est meilleur ou proche de celui des autres méthodes.



Sur les colonnes, les différentes fonctions et sur les lignes, les méthodes :
(1) *PlaneFitting*, (2) *AreaWeighted*, (3) *ExtendedQuadricFitting*,
(4) *ChenSchmitt* et (5) *ExtendedSineFitting*.

FIGURE 4.26 – Résultats des tests de convergence globale des estimateurs de normales sur l'ensemble des fonctions $z = f(x, y)$ avec le discrétiseur *SplitSquare* ainsi que sur l'*UV-Cylindre* et l'*UV-Sphère*, pour une distance d'échantillonnage due à une grille de 32x32 et une échelle de couleurs *HotMetal* sur l'intervalle $[0; 0,001]$.

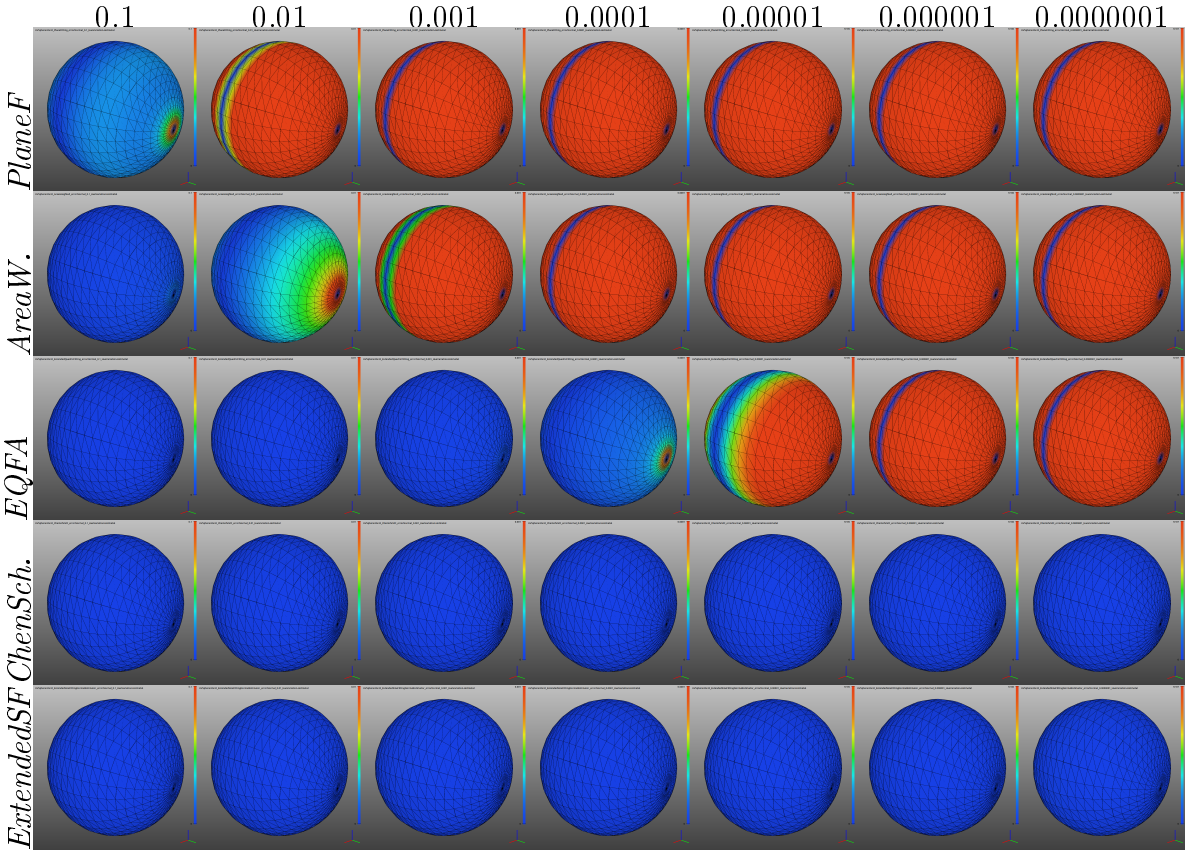
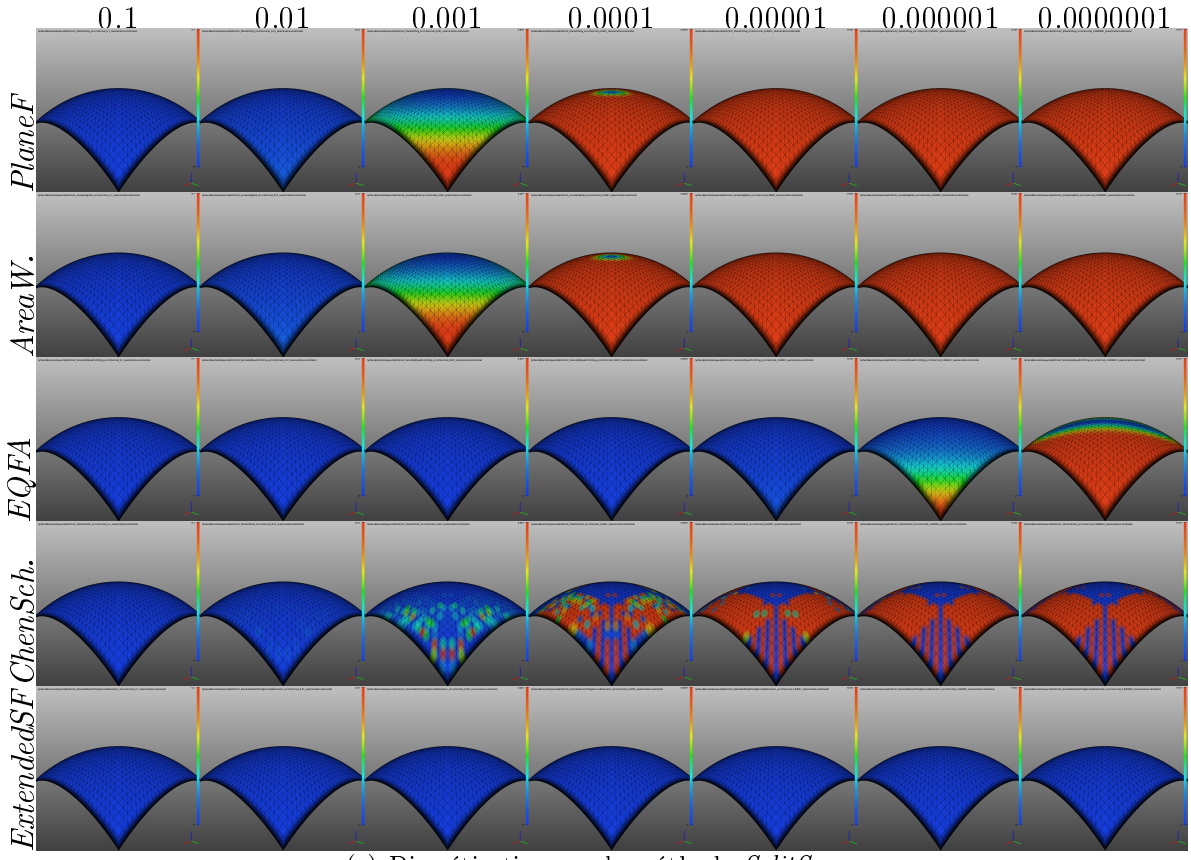
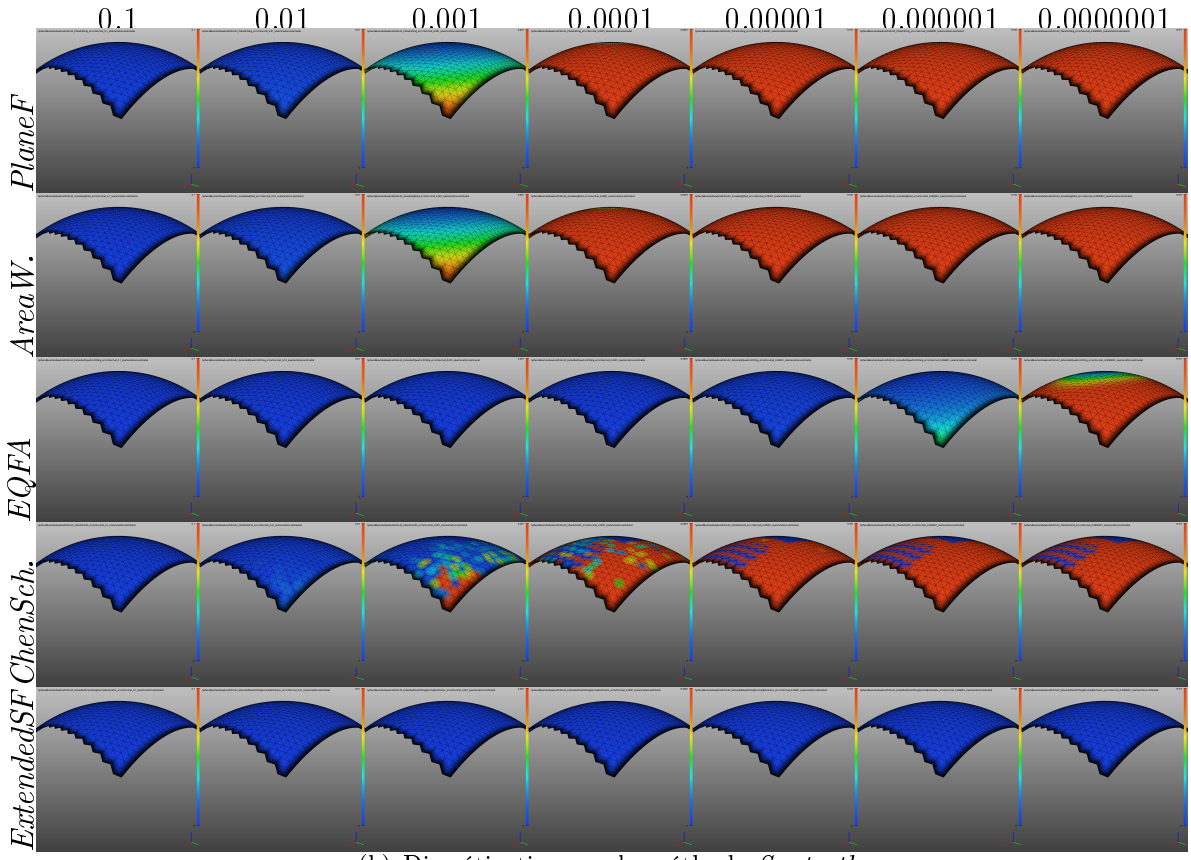


Figure 4.27 – Résultats du test de convergence globale des estimateurs de normales sur l'*UV-Sphère*, pour une distance d'échantillonnage due à une grille de 32x32 et en échelle de couleurs en *HotMetal* sur l'intervalle $[0; x]$ (x étant donné en colonne).



(a) Discrétisation par la méthode *SplitSquare*



(b) Discrétisation par la méthode *Sawtooth*

FIGURE 4.28 – Résultats du test de convergence globale des estimateurs de normales sur la fonction sphère discrétisée en *Sawtooth* et *SplitSquare*, pour une distance d'échantillonnage due à une grille de 32x32 et en échelle de couleurs en *HotMetal* sur l'intervalle $[0; x]$ (x étant donné en colonne).

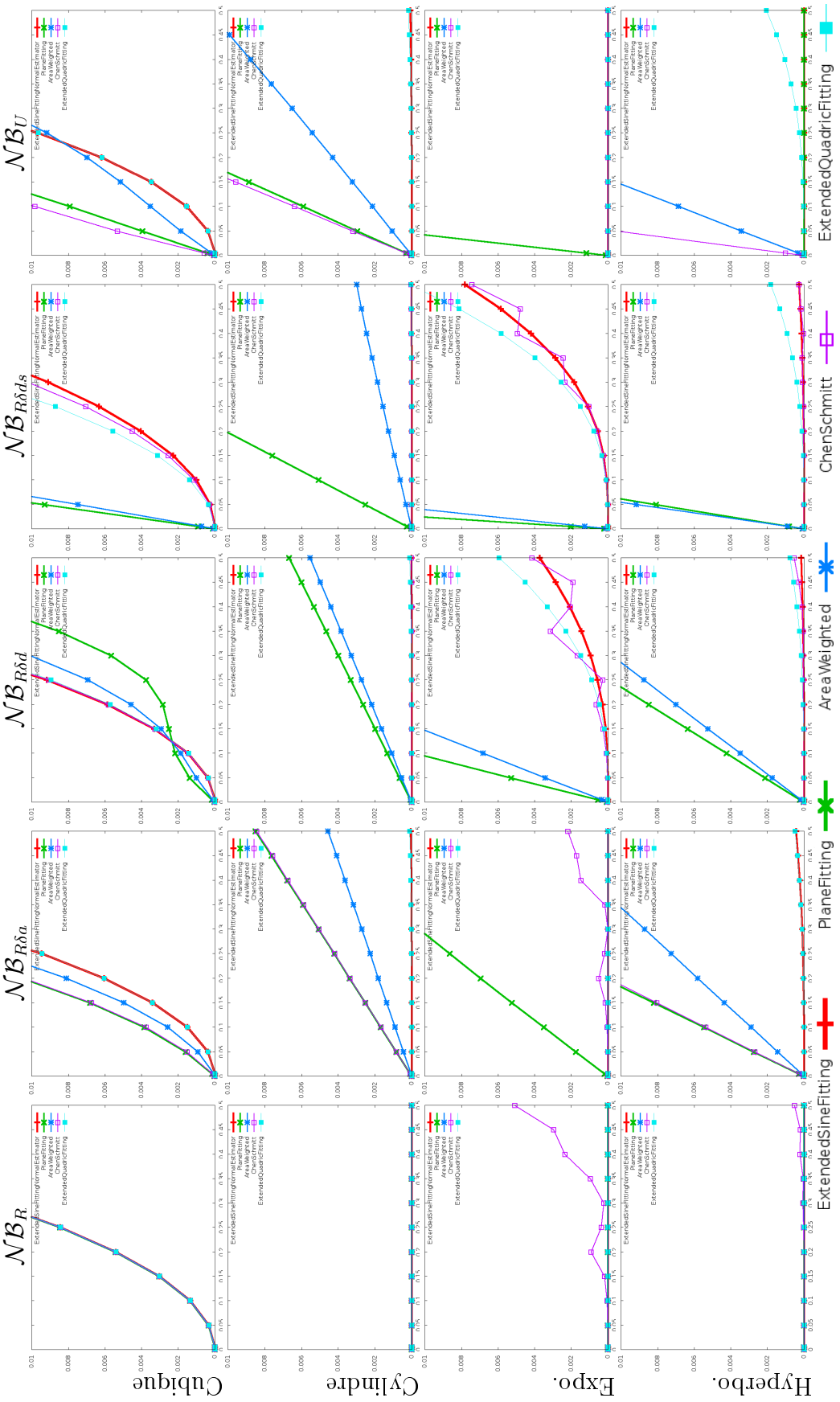


FIGURE 4.29 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,01** et une valence de voisinage de 6.

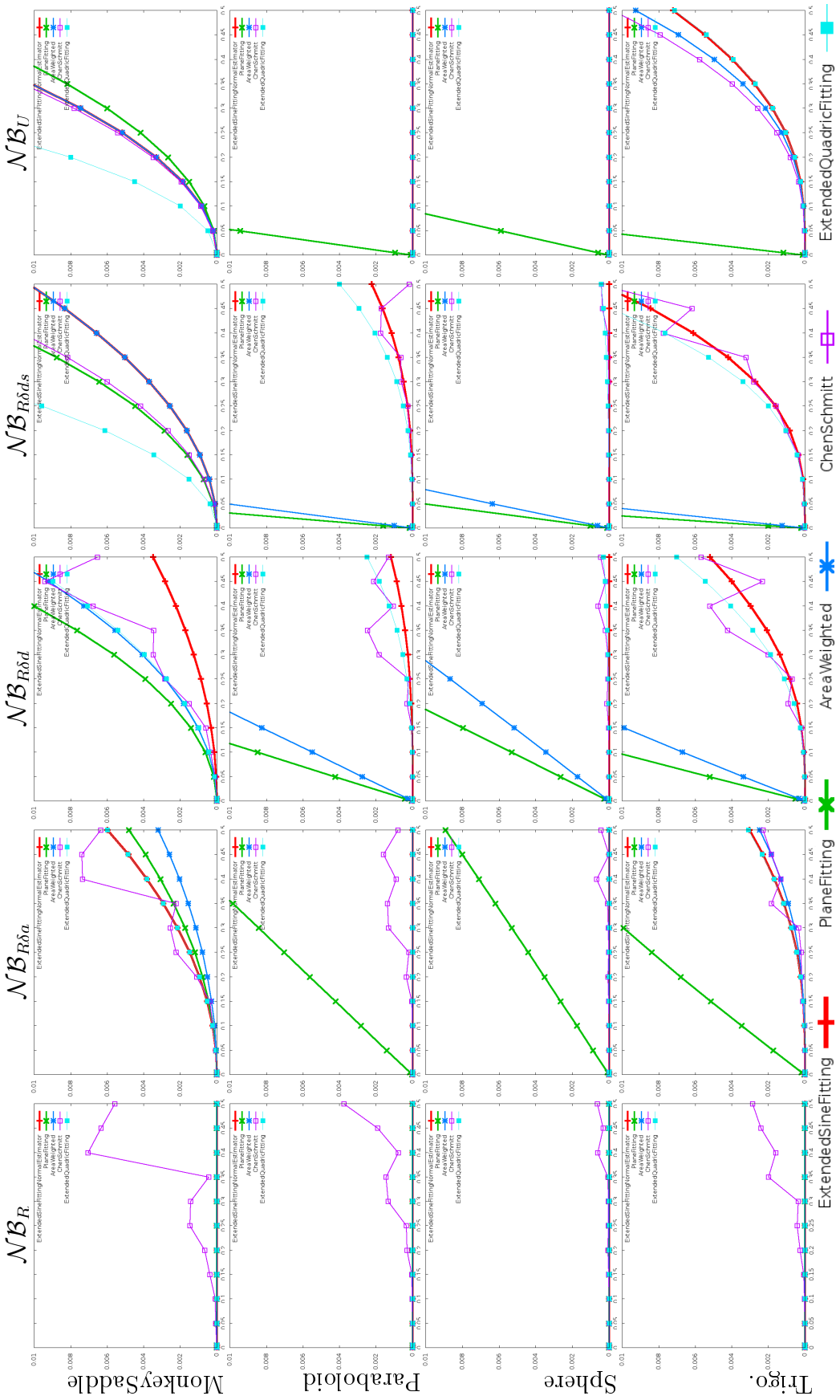


FIGURE 4.30 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,01** et une valence de voisinage de 6.

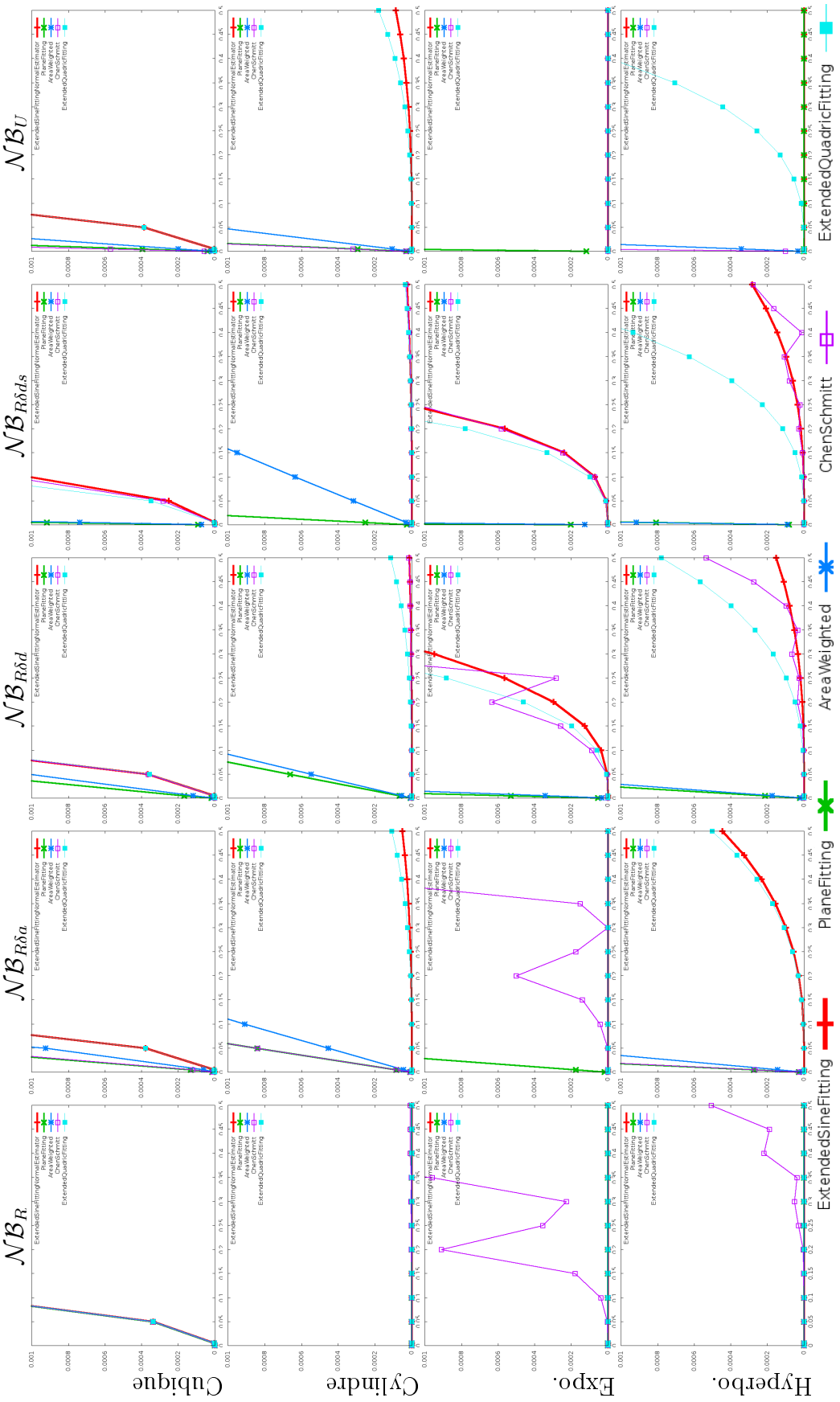


FIGURE 4.31 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,001** et une valence de voisinage de 6.

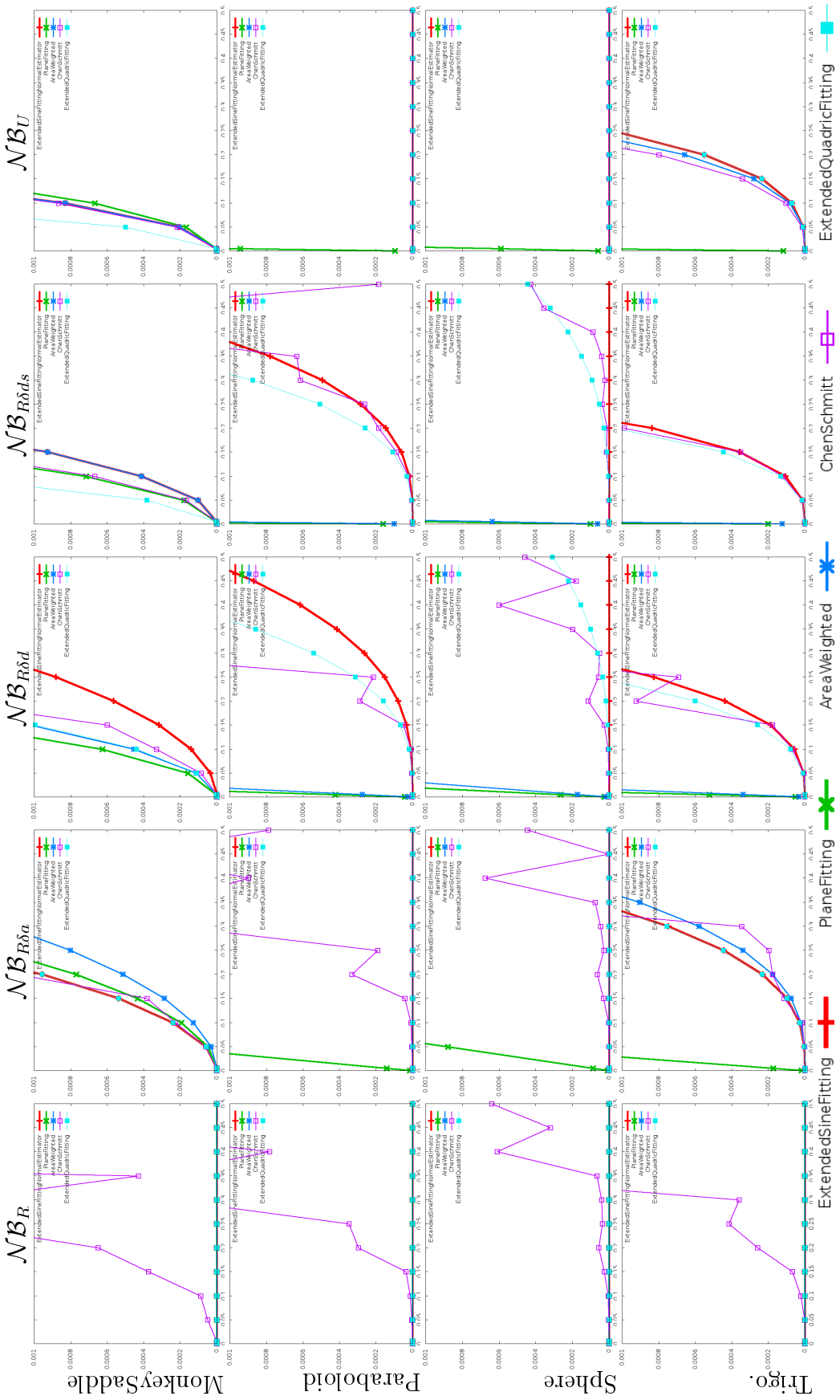


FIGURE 4.32 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,001** et une valence de voisinage de 6.

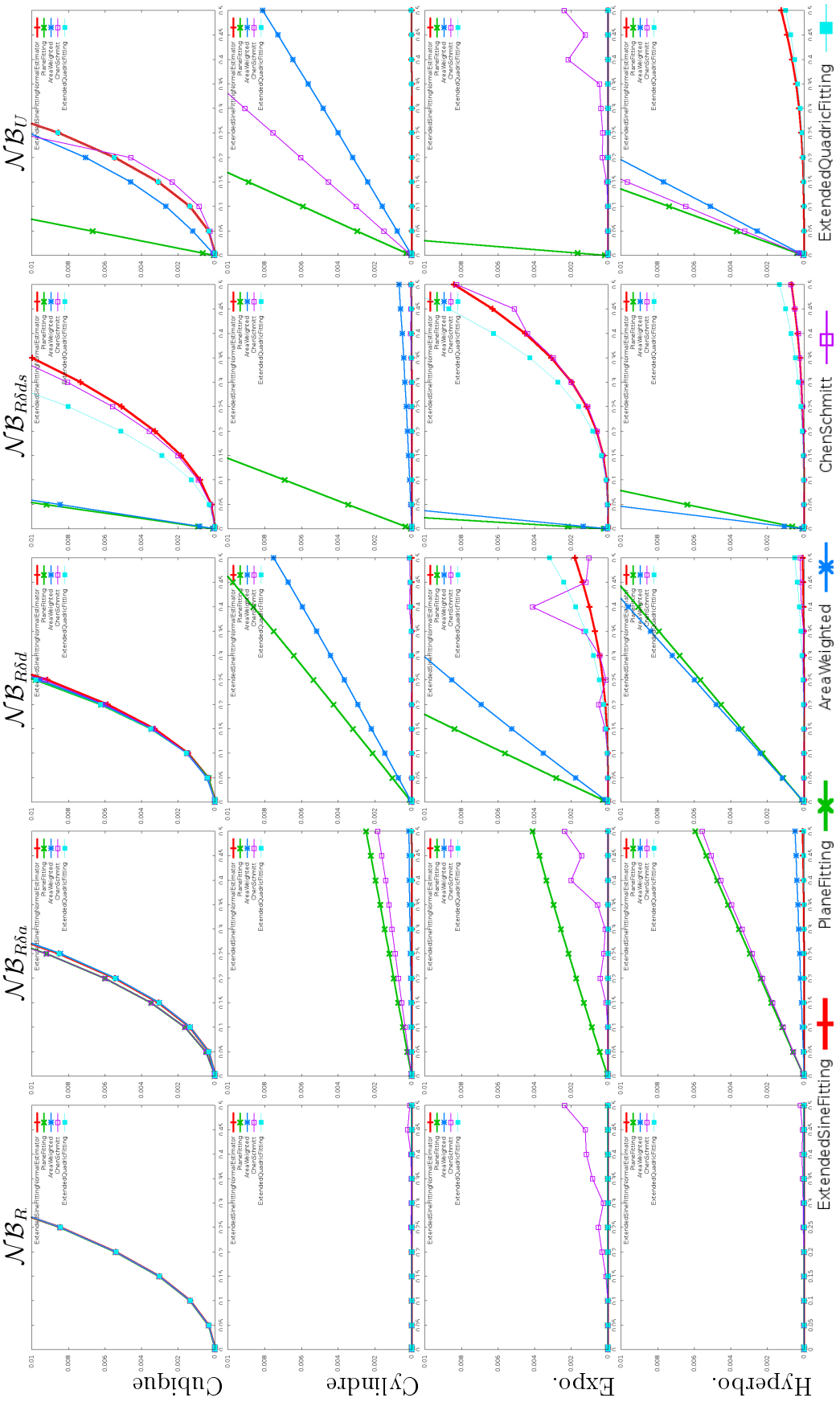


FIGURE 4.33 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,01** et une valence de voisinage de 12.

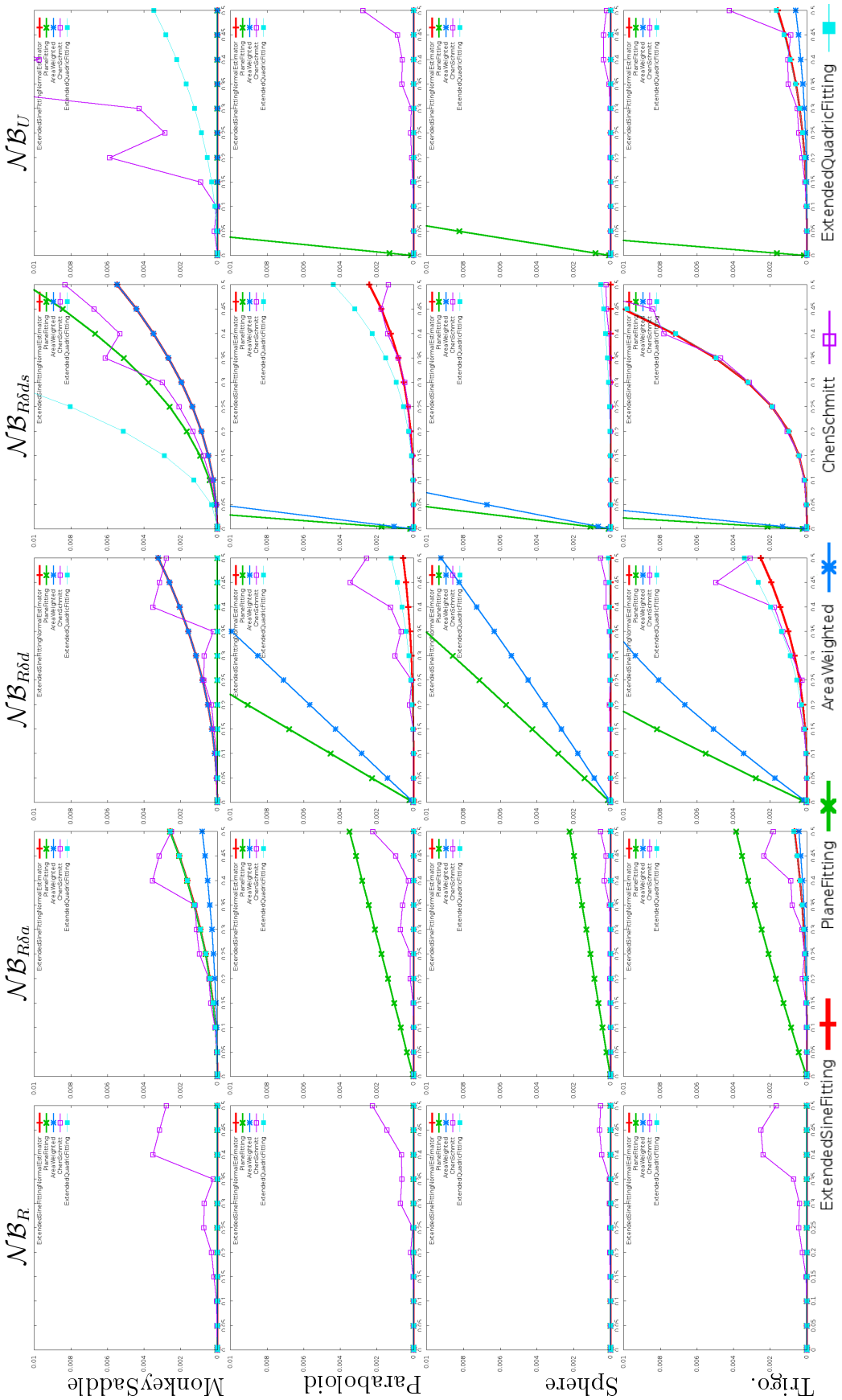


FIGURE 4.34 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,01** et une valence de voisinage de 12.

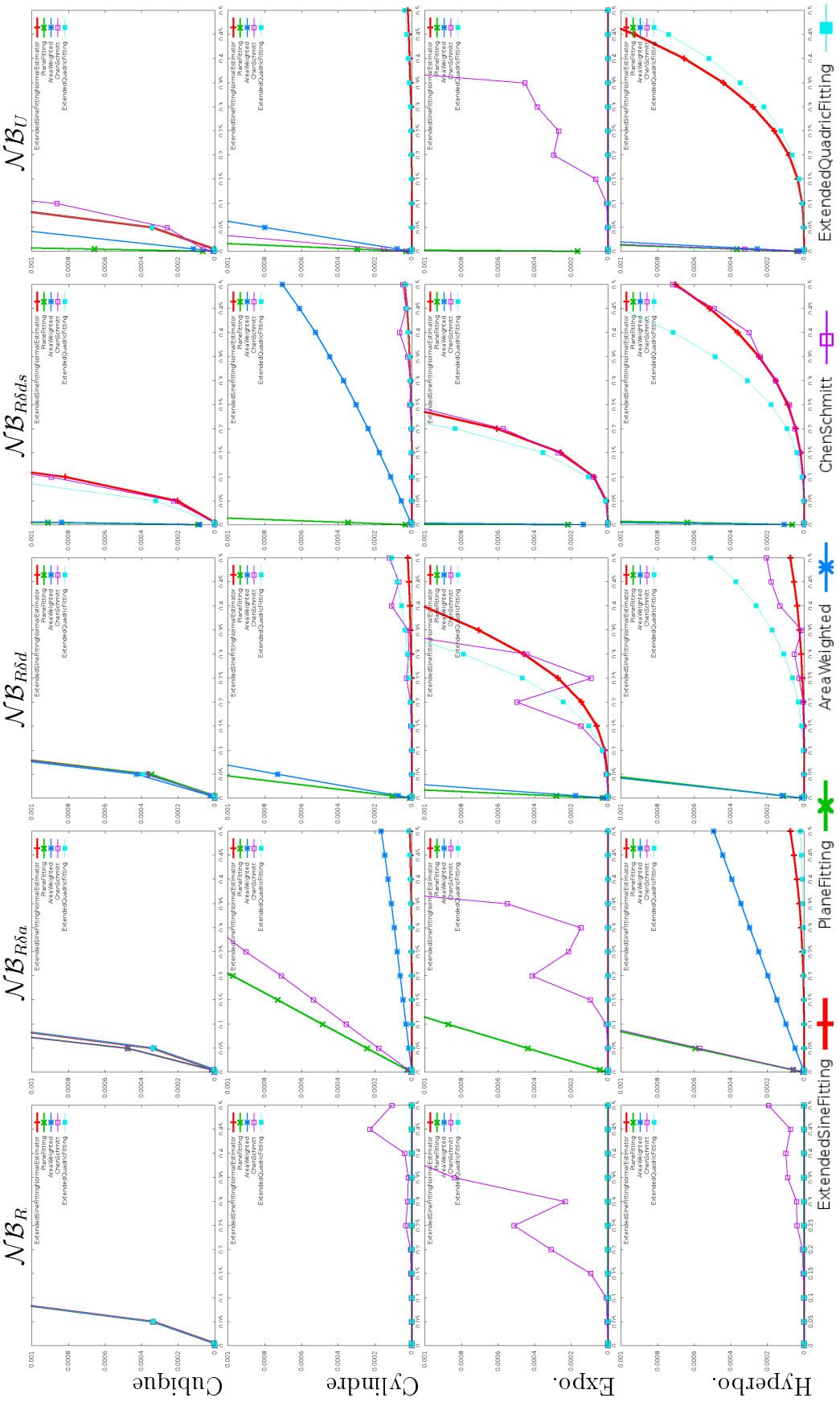


FIGURE 4.35 – Partie 1/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,001** et une valence de voisinage de 12.

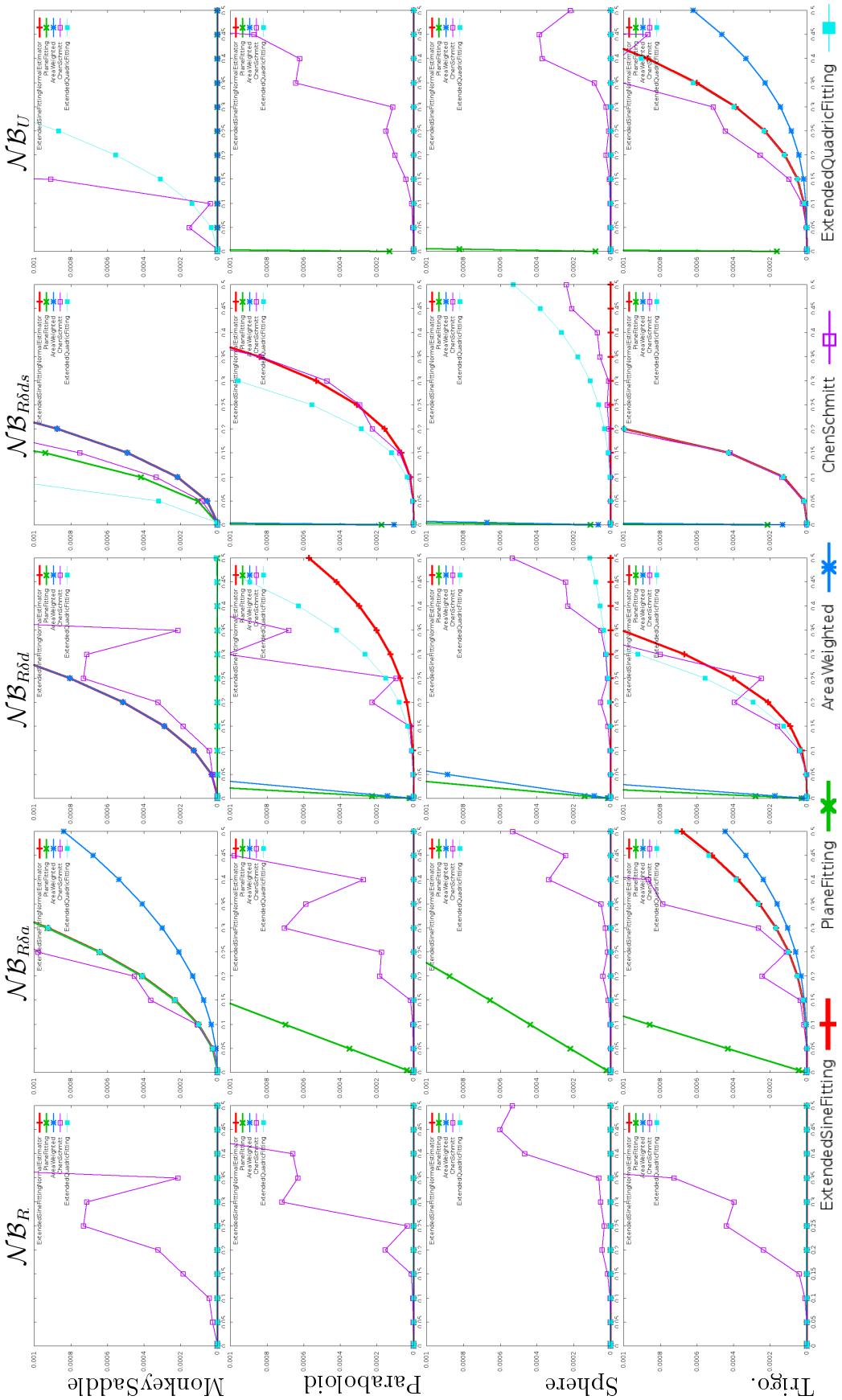


FIGURE 4.36 – Partie 2/2 : Résultats du test de convergence ponctuelle des estimateurs de normale sur l'ensemble des fonctions étudiées, avec une amplitude d'erreur de **0,001** et une valence de voisinage de 12.

Bilan sur les estimateurs de normale

Afin de confronter les différents estimateurs entre eux, nous reprenons et comparons les estimateurs de normale avec les différents critères de comparaisons précédemment introduits. Le tableau 4.37 donne un résumé de ces résultats. On observe que sur :

- la précision : exception faite de l'*Hyperboloïde*, les méthodes *PlaneFitting*, *AreaWeighted* et *ChenSchmitt* sont les moins précises sur l'ensemble des tests réalisés. Les méthodes *ExtendedQuadricFitting* et *ExtendedSineFitting* sont les méthodes les plus précises sur la majorité des tests. Sur l'ensemble des tests, la méthode *ExtendedSineFitting* donne en moyenne une meilleure précision que la méthode *ExtendedQuadricFitting*.
- la convergence : la méthode *ChenSchmitt* est la seule qui ne converge pas. Les méthodes *PlaneFitting* et *AreaWeighted* convergent à une vitesse bien moindre que les méthodes *ExtendedQuadricFitting* et *ExtendedSineFitting*. Bien que dans certains cas la méthode *AreaWeighted* donne les meilleures vitesses de convergence comme sur les cas : avec le discrétiseur $\mathcal{NB}_{R\delta a}$ sur les surfaces *MonkeySaddle* et *Trigonométrique* avec une cardinalité du voisinage de 6 ou 12 et avec le discrétiseur $\mathcal{NB}_U$ sur la surface *Trigonométrique* avec une cardinalité du voisinage de 12. Alors que *ExtendedQuadricFitting* et *ExtendedSineFitting* donnent des résultats équivalents.
- la stabilité aux perturbations du voisinage : les méthodes *PlaneFitting* et *AreaWeighted* sont très sensibles aux perturbations du voisinage. On peut prendre comme exemple les trois premières lignes de la Figure 4.36. Mais comme on peut le voir sur la quatrième ligne, la méthode *AreaWeighted* est plus sensible que la *PlaneFitting*. Les méthodes *ExtendedQuadricFitting* et *ChenSchmitt* montrent aussi des sensibilités à l'organisation spatiale du voisinage. Par exemple sur les Figures 4.28 et 4.27, qui donnent l'erreur d'estimation de la normale sur une sphère discrétisée par les méthodes *SplitSquare*, *Sawtooth* et *UV-Sphère*, on peut voir que les méthodes *ExtendedQuadricFitting* et *ChenSchmitt* varient. Enfin la méthode *ExtendedSineFitting* est la moins sensible des méthodes comparées.

De ces critères, il résulte que la méthode *ExtendedSineFitting*, dans ce contexte expérimental, est la plus stable et la plus précise des méthodes comparées ici. Toutefois sa complexité en temps de calcul est supérieure à celle des méthodes *PlaneFitting*, *AreaWeighted* et *ExtendedQuadricFitting*. Afin de donner une estimation à la valeur du k donné dans le Tableau 4.37, nous avons réalisé un test de performance illustré par le graphique 4.38. Le résultat de ce test montre que l'angle d'erreur initial de la normale n'impacte pas sur le nombre d'itérations de l'algorithme. Nous avons également évalué ce nombre d'itérations comme étant majoré par 10^3 sur des calculs en valeurs flottantes double précision.

Méthodes	(A)	(B)	(C)	(D)	Complexité
PlaneFitting	$-$	$+$	$---$	*oui*	$O(n^2)$
AreaWeighted	$+$	$+/-$	$--$	*non*	$O(n)$
ExtendedQuadricFitting	$++$	$+++$	$+$	*oui*	$O(n^2)$
ChenSchmitt	$++$	$---$	$++$	*oui*	$O(n^2log(n))$
ExtendedSineFitting	$+++$	$+++$	$+++$	*oui*	$k \cdot O(n^2)$

(A) Précision, (B) Convergence
(C) Stabilité aux variations de la répartition spatiale du voisinage
(D) Passage au nuage de points

FIGURE 4.37 – Tableau de comparaison des méthodes d'évaluation de normale.

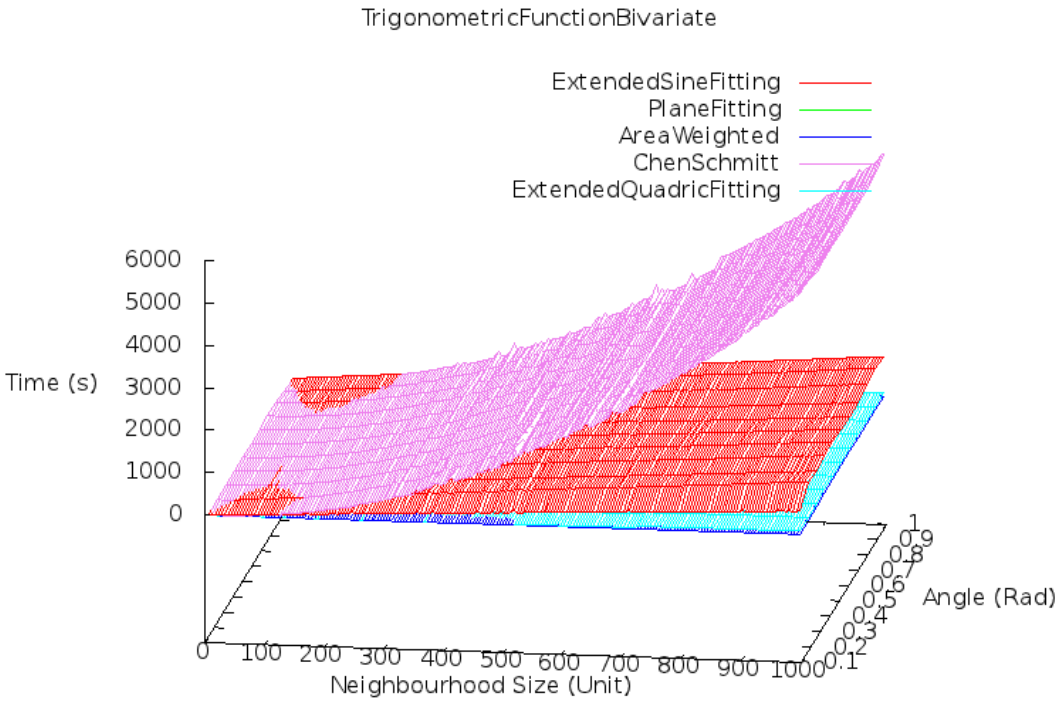


FIGURE 4.38 – Test de performance des estimateurs de normale en fonction de la valence et de l'angle d'erreur (ψ) de la normale initiale.

Chapitre 5

Applications

Ce chapitre présente deux applications des résultats de nos recherches. La première est une application dans le domaine de la chirurgie maxillofaciale pour la correction mandibulaire. Le seconde est une application dans le domaine de l'anthropologie qui a pour but de faire de la reconstitution faciale.

5.1 Correction maxillofaciale

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Mathieu Laurentjoye médecin en poste dans le service de chirurgie maxillofaciale et stomatologie, CHU de Bordeaux et doctorant en sciences de l'Université de Bordeaux / INSERM.

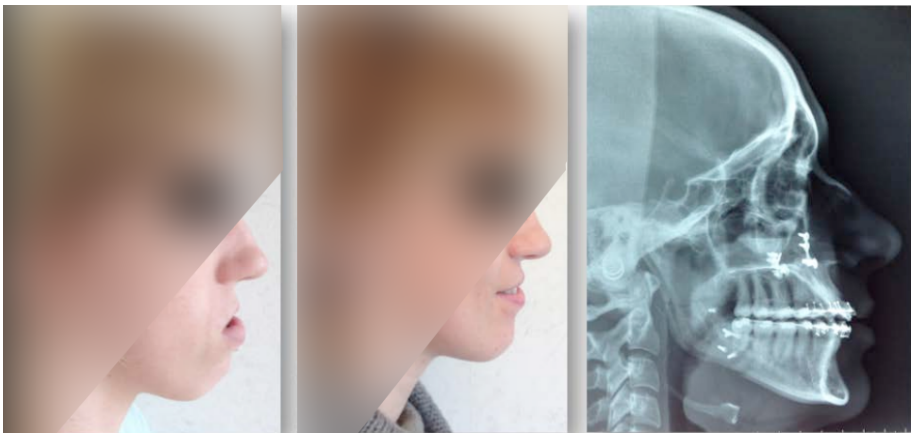


FIGURE 5.1 – Avant-après opération de correction maxillofaciale (Photo de Mathieu Laurentjoye). Sur la figure à gauche la photo avant opération, au centre la photo après opération et à droite la radio après opération.

La correction maxillofaciale à laquelle nous nous sommes intéressés consiste en une *BSSO*. La *BSSO* pour *Bilateral Sagittal Split Osteotomy* (Ostéotomie sagittale bilatérale du ramus de la mandibule) est une opération chirurgicale fonctionnelle qui

a pour but de corriger l'occlusion dentaire d'un patient souffrant d'une malocclusion dento-squelettique. La malocclusion dentaire est due à un mauvais alignement entre la mandibule et le maxillaire (cf. Figure 5.1). Communément, il s'agit d'une translation sur l'axe antéro-postérieur (cf. Définition 5.1) de la mandibule. Mais le mouvement peut aussi se caractériser dans les trois axes par des translations ou/et rotations.

Définition 5.1 (Axes et plans anatomiques) *Pour placer et mesurer l'anatomie humaine, il existe trois axes de références formant un repère orthonormé direct (cf. Figure 5.2(a)) :*

- *l'axe antéro-postérieur ou sagittal : de ventral à dorsal,*
- *l'axe transversal ou horizontal : de gauche à droite*
- *et l'axe longitudinal ou vertical : de cranial à caudal.*

De ces trois axes, il découle trois plans définis comme suit (cf. Figure 5.2(b)) :

- *le plan antéro-postérieur ou sagittal est le plan contenant les axes antéro-postérieur et longitudinal,*
- *le plan frontal est le plan contenant les axes transversal et longitudinal*
- *et le plan transversal ou axile est le plan contenant les axes antéro-postérieur et transversal.*

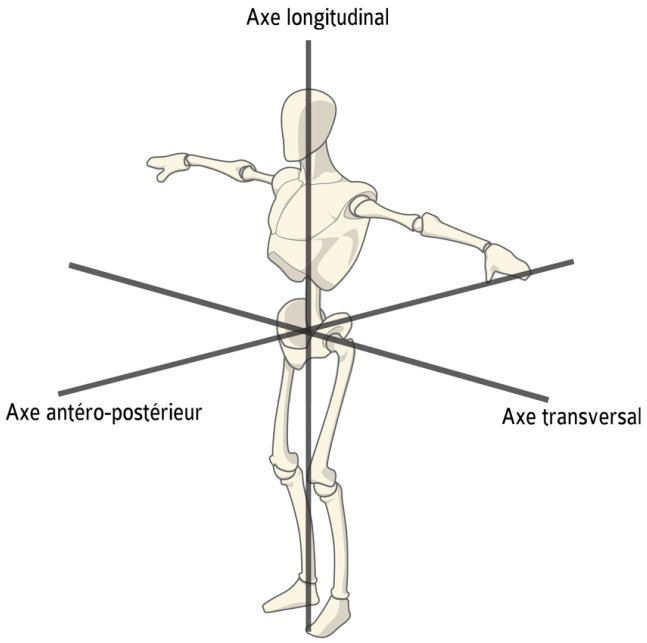
L'intervention peut ne nécessiter qu'un repositionnement de la mandibule par rapport au maxillaire. Cependant, dans certains cas le maxillaire nécessite également d'être replacé par rapport au crâne. Toutefois, cela ne correspond pas à une condition d'occlusion dentaire mais à des critères morphologiques que le médecin juge nécessaires de corriger ou non. Dans cette partie, nous ne nous intéresserons qu'à la correction du positionnement de la mandibule.

L'implication de cette thèse dans ce projet est d'améliorer et simplifier le calcul de l'occlusion optimale par détection de points saillants. Ces points saillants servant de repères et de contraintes à un algorithme de repositionnement automatique de la mandibule par rapport au maxillaire.

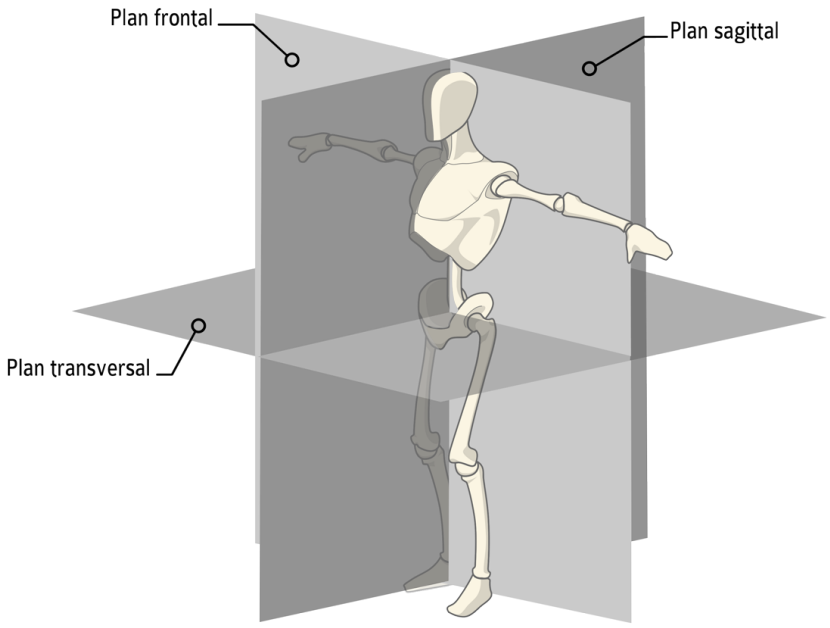
Dans un premier temps, nous allons présenter la technique originale qui nous sert de référence et dans un second temps nous allons donner notre objectif et notre démarche pour l'atteindre. Enfin, nous faisons un bilan sur les résultats expérimentaux obtenus.

5.1.1 Technique originale

La *BSSO* se fait grâce à des guides occlusaux afin de prévoir les différentes positions entre la mandibule et le maxillaire durant la chirurgie. De ce fait, elle nécessite une phase de planification durant laquelle le chirurgien et le prothésiste s'accordent pour définir le mouvement de la mandibule avec un moulage en plâtre de la mâchoire du patient placé dans un articulateur (cf. Figure 5.3). Ensuite a lieu l'intervention.



(a) Axes de l'anatomie humaine.



(b) Plans de l'anatomie humaine.

Figure 5.2 – Référentiel 3D de l'anatomie humaine (images extraites du site web http ://www.sci-sport.com/).

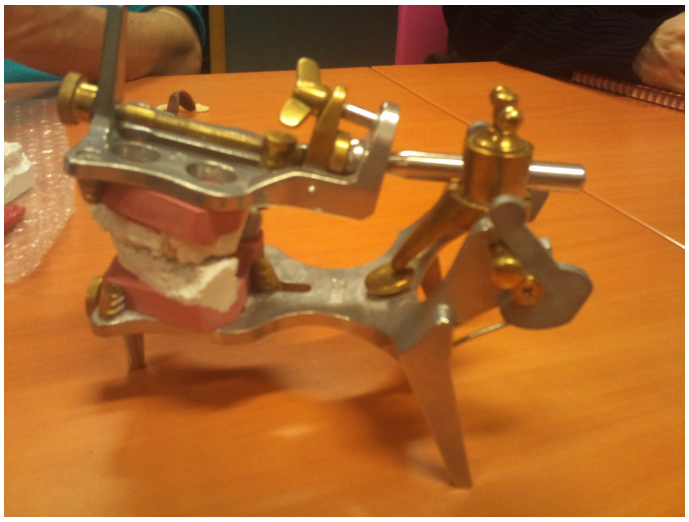


FIGURE 5.3 – Articulateur de moules dentaires pour planifier le mouvement entre la mandibule et le maxillaire.

Planification

Cette préparation a pour but de construire :

- un guide initial fait par replacement de l'articulateur avec un négatif de l'occlusion dentaire du patient avant opération et construite sur le moule avec de la résine,
- un guide final fait avec le recalage en occlusion optimale des moules en plâtre avec l'articulateur,
- potentiellement un guide intermédiaire également produit avec l'articulateur qui est nécessaire pour faire un premier recalage dans le cas d'une opération de la mandibule et du maxillaire.

Ces guides, donnés par la Figure 5.4, accumulent des imprécisions dans la mesure où ils nécessitent : de faire un négatif des dents du patient, la construction des plâtres, l'évaluation manuelle de la position d'occlusion finale. Toutes ces étapes sont coûteuse en temps et dépendent du prothésiste.

Intervention

Pour illustrer l'intervention, nous allons prendre un patient souffrant d'une malocclusion nécessitant un avancement mandibulaire (cf. Figure 5.5). L'intervention se déroule suivant les étapes décrites ci-dessous :

- Patient avant opération (a).
- Installation du guide initial pour fixer la mâchoire en position initiale (b).
- Repérage de la position initiale des condyles : le chirurgien installe une plaque déformable pour apposer quatre trous qui servent à mémoriser la position relative entre le maxillaire et les branches mandibulaires (c).



Figure 5.4 – Moulages en plâtre et les guides occlusaux construits à partir de ceux-ci (Sur la figue, en rouge le guide initial, en bleu et blanc des guides intermédiaires et en jaune le guide final).

- Retrait des plaques (d).
- Retrait des fixations en position initiale (e).
- Découpe bilatérale de la mandibule dans des plans para-sagittaux pour dissocier le corps des branches de la mandibule (f).
- Avancement du corps mandibulaire (g).
- Fixation de la position finale avec insertion du guide final (h).
- Repositionnement des plaques sur les branches pour redonner la position d'origine aux branches (i).
- Reconsolidation des trois parties de la mandibule par un vissage transversal (j).
- Retrait des fixations de la mâchoire (k).
- Patient après opération (l).

5.1.2 Nos objectifs et notre démarche

Nos objectifs :

- Virtualiser et partiellement automatiser la phase préparatoire avec comme résultat la synthèse des guides occlusaux par impression 3D. Ceci a pour but de réduire le temps et le coût de la phase préparatoire ; mais aussi accroître la précision des guides et des outils de positionnement condylaire (*CPD* : Condylar Positioning Devices).

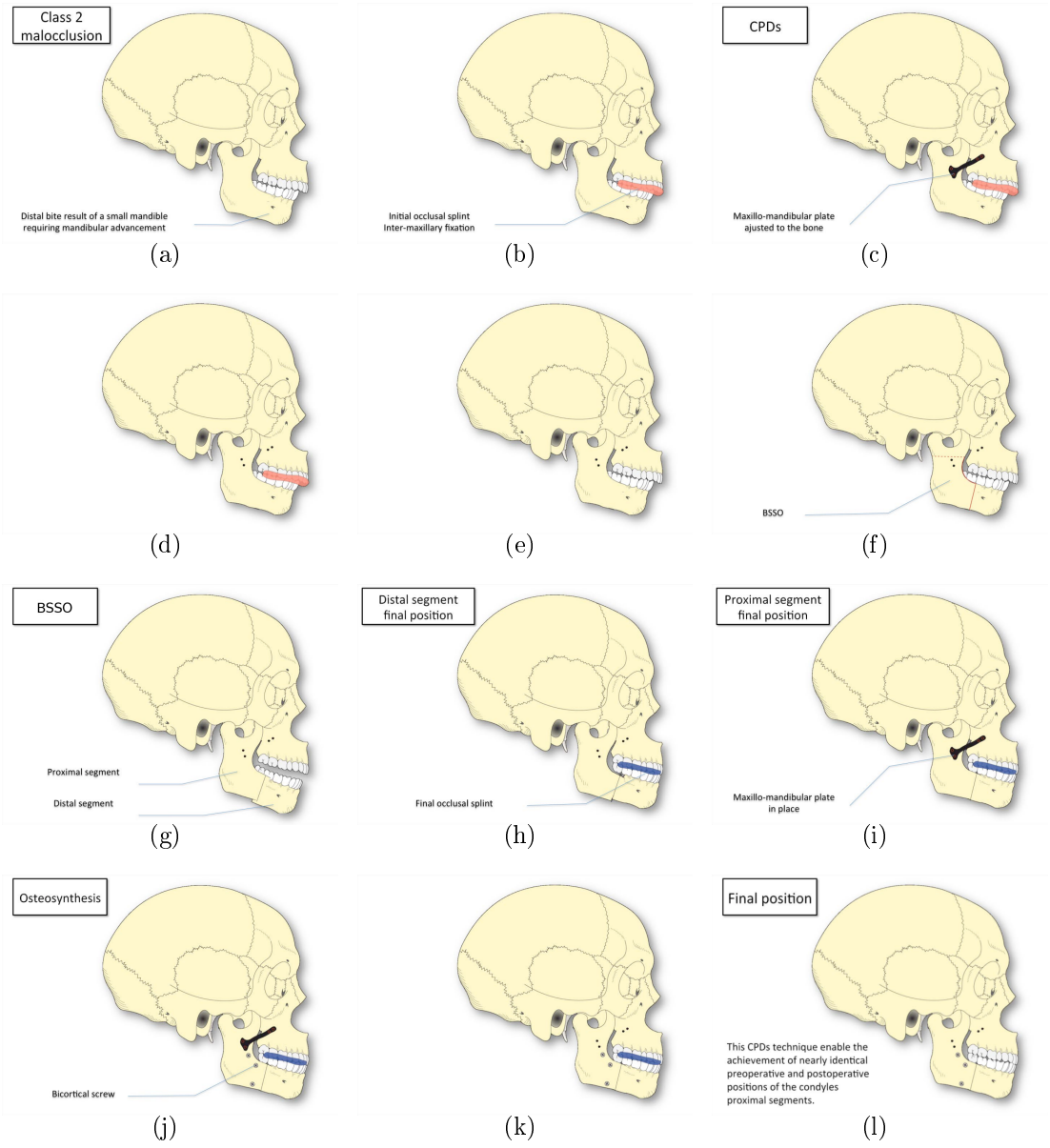


FIGURE 5.5 – Étapes successive de la technique originale utilisée comme modèle de principe opératoire (Images issue de la présentation de [LCDM14]).

– Minimiser les manipulations opératoires. En effet la méthode actuelle nécessite l'ouverture de la muqueuse du maxillaire afin de fixer les *CPD*, le modelage des *CPD* sur le patient pendant l'opération et le replacement de ceux-ci après la *BSSO*.

Notre démarche :

Dans un premier temps, afin de valider la faisabilité, nous avons reproduit la méthode courante avec la virtualisation de la phase préparatoire par expérimentation sur cadavre. Cette étape nous permet de valider la faisabilité de notre approche. Dans un second temps, nous avons intégré les *CPD* aux guides pour simplifier le repositionnement des condyles avant l'ostéosynthèse [1] mandibulaire.

Première étape, virtualisation de la phase préparatoire. La virtualisation de la phase préparatoire se fait par utilisation de scanner pré-opératoire de la tête du patient à partir duquel on extrait la surface du crâne par la méthode [GD05] (cf. Figure 5.6(a)). Les images de la Figure 5.6 donnent les différentes étapes de cette première opération.

Après l'extraction de la surface du crâne du patient :

- On dissocie la mandibule du crâne (a).
- On sépare les branches mandibulaires du corps par découpe par plan comme le ferait le chirurgien pendant l'opération (b) et (c).
- On déplace le corps de la mandibule du mouvement souhaité (d).
- On évalue l'occlusion optimale par faible rotation et translation de la mandibule par rapport au maxillaire (e).
- On impose un guide neutre pour englober la surface occlusale. On extrait un négatif des surfaces occlusales en position finale par opération booléenne (f).
- On reprend la position initiale pour construire des *CPD* qui se fixent par emboîtement de négatifs de surfaces inscrits sur les surfaces de contact des *CPD* (g).
- Enfin, on imprime le guide d'occlusion finale et les *CPD* (h) et (i).

L'opération elle-même est illustrée aux Figures 5.6(j), (k) et (l). Cette première approche donne des résultats satisfaisants avec une erreur inférieure à celle constatée en moyenne sur la méthode originale (cf. Figure 5.7).

Deuxième étape, le passage au guide avec *CPD* inclus. Afin de simplifier l'intervention, nous avons conçu et expérimenté un premier ensemble de guides chirurgicaux avec *CPD* intégré (cf. Figure 5.8).

Avec ces nouveaux guides, l'intervention se déroule comme suit :

- ouverture de la mandibule,
- pose du guide initial pour faire les trous de recalage (cf. Figure 5.9(a)),
- retrait du guide initial,
- *BSSO*,
- blocage de la mâchoire en position finale et fixation des branches en position initiale par insertion du guide final (cf. Figures 5.9(b) et 5.9(c)).

1. L'ostéosynthèse est une technique chirurgicale qui consiste à maintenir deux fragments d'os ouverts l'un contre l'autre pour les fusionner.

– ostéosynthèse des trois morceaux de la mandibule par trois vis transversales de chaque coté (cf. Figure 5.9(d)).

La comparaison entre le mouvement souhaité et le mouvement effectif donne une précision d'intervention inférieure au millimètre et donc bien supérieure à celle de la technique actuelle (cf. Figure 5.10). La variabilité d'intervention, due au praticien, est réduite car le chirurgien est guidé durant l'intervention. De plus, on réduit la durée d'intervention d'environ 15 minutes pour une intervention durant en moyenne 2h.

5.1.3 Apports de la thèse pour cette application

L'occlusion dentaire optimale répond à des critères de positionnements fixes et relatifs. Par exemple comme illustré à la Figure 5.12 :

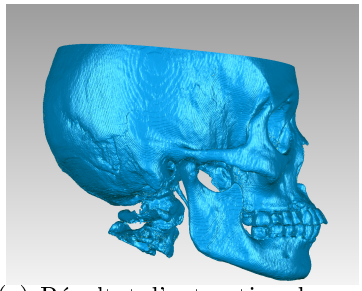
– les cuspides des canines supérieures doivent être alignées avec l'espace entre la canine et la prémolaire inférieures,
– les dents de la partie supérieure doivent recouvrir celles de la partie inférieure,
– les incisives supérieures doivent chevaucher d'environ 2 mm les inférieures,
– les espaces entre les incisives supérieures et inférieures doivent être alignés,
– etc.

L'objectif de ce projet est de développer un logiciel de planification de la chirurgie. Actuellement, la détermination de la position finale est définie manuellement par la détection de certains points caractéristiques comme les cuspides des dents (cuspides) et tout particulièrement celles des canines. Ces cuspides sont des éléments de forte courbure et sont donc saillants par rapport à celle-ci (cf. Figure 5.11).

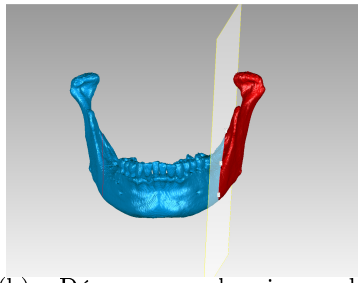
L'objectif final, en cours de réalisation, est d'automatiser le placement de ces points pour faire un premier alignement de grossier. Enfin l'utilisation d'un algorithme de type *ICP* [SLW02, SDG07] contrôlé par les contraintes médicales permettrait de déterminer une position optimale à l'occlusion.

5.1.4 Conclusion

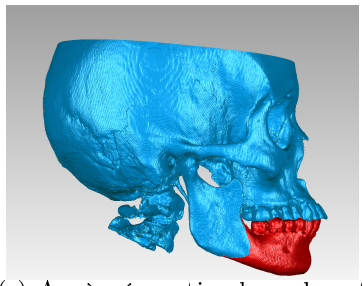
Ce travail est toujours en cours d'amélioration et de développement. Mais les résultats obtenus sont très prometteurs. Avec sept interventions déjà effectuées par cette méthode, on obtient des résultats équivalents en terme de précision et un gain de temps par rapport à la technique originale. Cette nouvelle méthode permettrait de réduire le temps de préparation, le temps d'intervention et réduirait le risque de complications per-opératoires. Pour l'instant, il a donné lieu aux publications suivantes : [CL12] et [LCDM14]. Il nous reste tout particulièrement à finaliser le calcul de l'occlusion optimale automatisée.



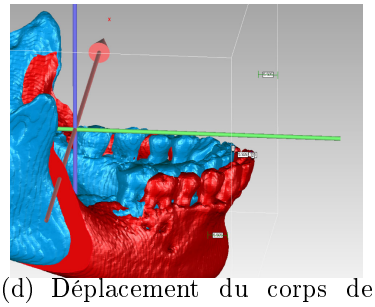
(a) Résultat d'extraction de surface.



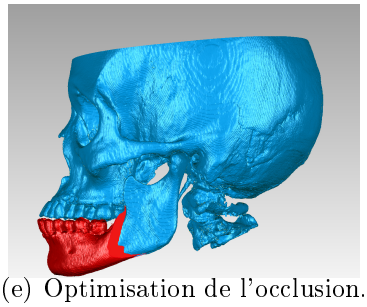
(b) Découpe planaire de branches mandibulaires.



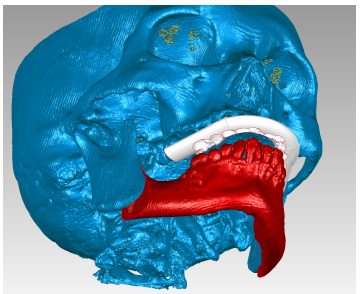
(c) Après séparation branches et corps mandibulaires.



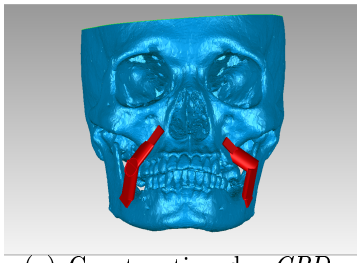
(d) Déplacement du corps de la mandibulaire pour réaliser le mouvement souhaité.



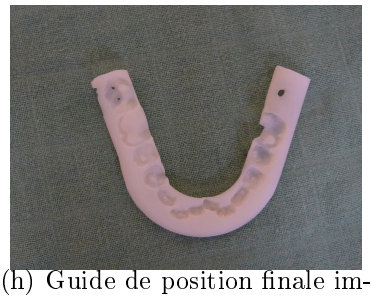
(e) Optimisation de l'occlusion.



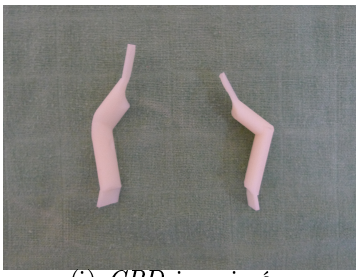
(f) Construction d'un guide occlusal en position finale.



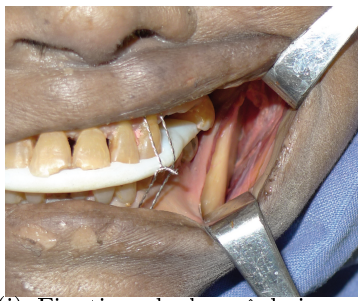
(g) Construction des *CPD*.



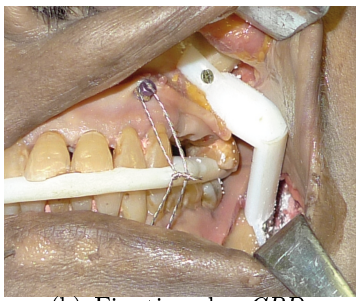
(h) Guide de position finale imprimé.



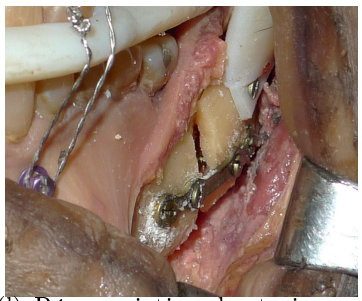
(i) *CPD* imprimés.



(j) Fixation de la mâchoire en position finale avec le guide imprimé après séparation des branches.

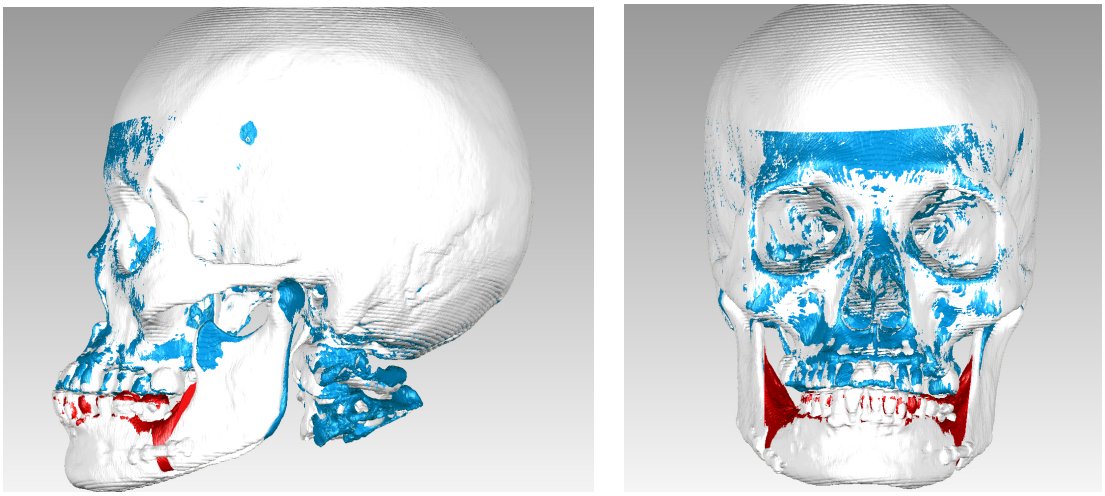


(k) Fixation des *CPD*.



(l) Ré-association des trois parties de la mandibule.

Figure 5.6 – Expérimentation cadavérique de validation de la faisabilité de la planification virtuelle.

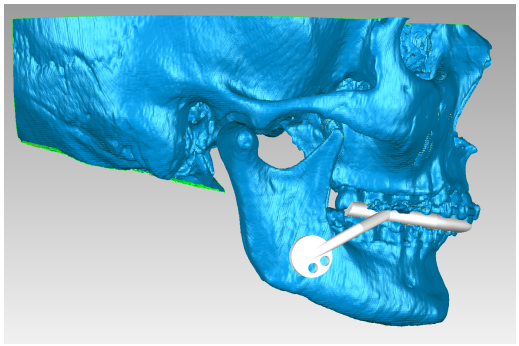


(a) Vue latérale. (b) Vue antérieure.

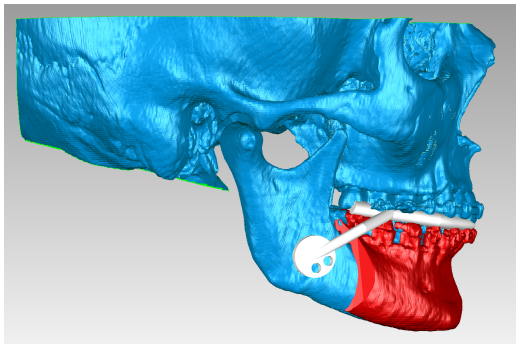
FIGURE 5.7 – Comparaison entre le mouvement souhaité et le mouvement effectif. Sur la figure, en blanc l'extraction de surface sur le scanner post-opératoire, en rouge le corps de la mandibule déplacé en position souhaitée et en bleu les branches mandibulaires et le maxillaire en position initiale.



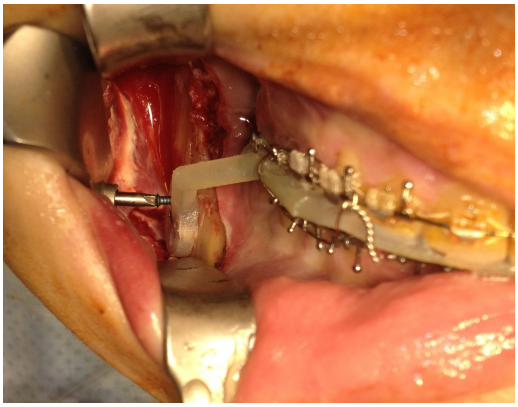
FIGURE 5.8 – Guide d'occlusion avec *CPD*.



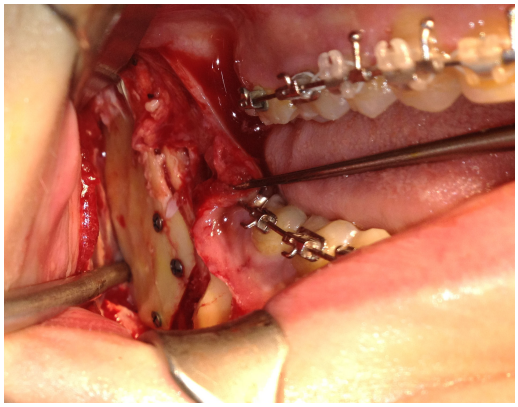
(a) Positionnement du guide initial pour placer les trous de repositionnement.



(b) Positionnement du guide final pour déterminer la position finale du corps de la mandibule et retrouver la position initiale des branches.



(c) Photo de vissage des vis en position finale.



(d) Photo après ostéosynthèse.

Figure 5.9 – Opération avec le guide incluant les *CPD*.

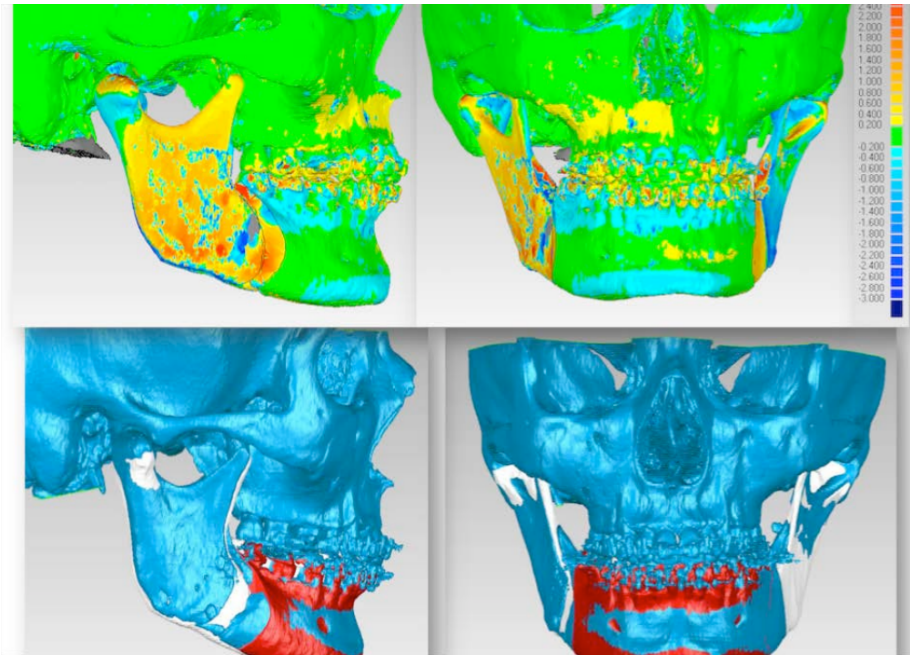


FIGURE 5.10 – Comparaison entre le déplacement souhaité et le résultat après intervention avec le guide incluant les *CPD*.

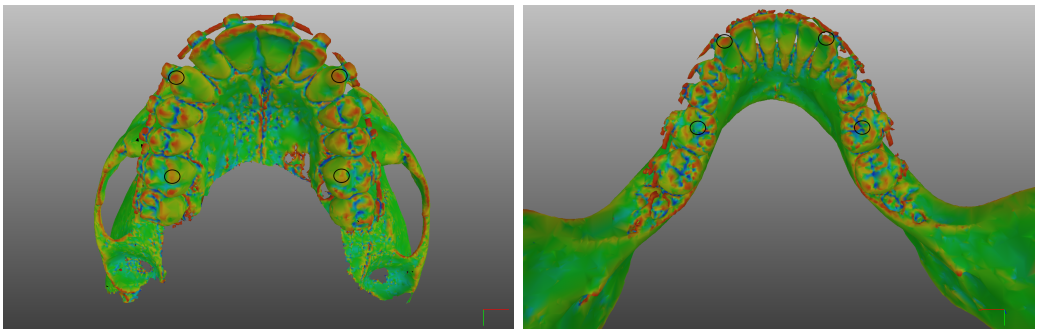
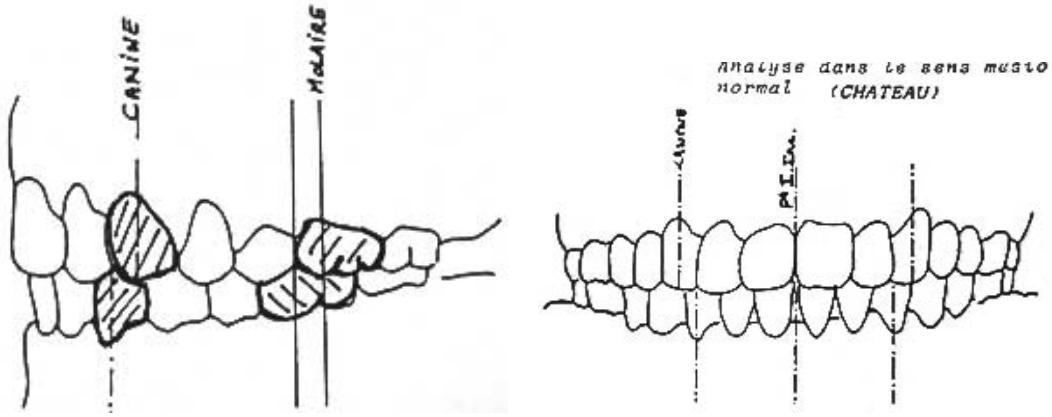


FIGURE 5.11 – Aide au placement des points de repère pour l'occlusion (ici entourés en noir).



(a) Alignement transversales. (b) Alignement antéro-postérieur.

Figure 5.12 – Schémas d'occlusion optimale (Illustrations issue du site web http ://www.chu-tours.fr/chirurgie-orthognatique/).

5.2 Reconstitution faciale

La reconstitution faciale consiste à faire l'estimation du visage d'un individu à partir des caractéristiques de son crâne. Il s'agit d'une technique communément utilisée en sciences médico-légales et en anthropologie. En sciences médico-légales, elle permet d'éditer des portraits robots de victimes afin de les identifier. En anthropologie, elle permet, par exemple, de retrouver les visages de personnes célèbres de l'Histoire, comme récemment le visage d'Henri IV, reconstitué à partir de son scanner volumique (cf. Figure 5.13).

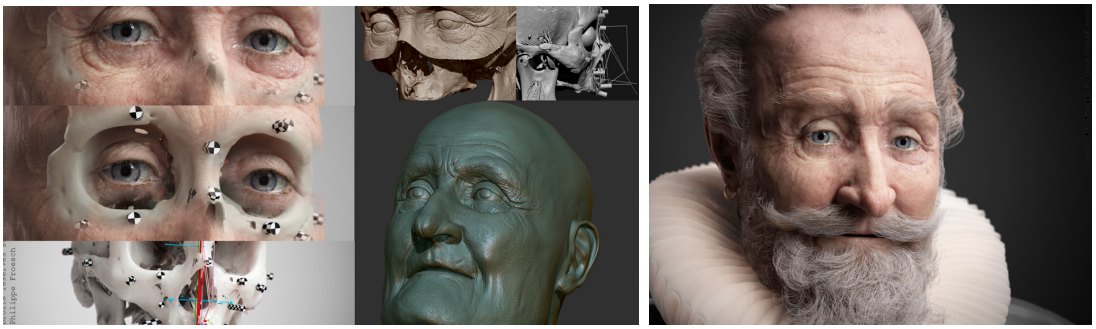


FIGURE 5.13 – Reconstitution faciale d'Henri IV (2013) (Images du site web http ://www.visualforensic.com).

Nous commencerons par voir le principe de la méthode, puis les apports de cette thèse dans cette application.

5.2.1 Principe de la méthode

Le principe de base de la méthode consiste à définir un ensemble de points caractéristiques, appelés *landmarks*, sur le crâne et à évaluer les épaisseurs des tissus mous. La Figure 5.14 donne une illustration de la technique de reconstitution par modelage. À partir de ces points caractéristiques crâniaux, on évalue un ensemble de points caractéristiques cutanés. Ces points sont obtenus par étude statistique des épaisseurs de tissus mous en chaque point caractéristique du crâne. Enfin le visage est reconstitué par interpolation entre ces points cutanés. Cette technique est peu précise et donne des résultats très variants suivant l'opérateur.

Pierre Guyomarc'h chercheur de PACEA (UMR 5199), a développé une nouvelle technique informatisée d'évaluation de points caractéristiques cutanés à partir de mesures statistiques obtenues sur 500 scanners complets (cf. Figure 5.16) : AFA3D (Anthropological Facial Approximation in Three Dimensions : approximation d'un visage anthropologique en trois dimensions). Cette évaluation prend en compte le sexe, l'âge, la corpulence et la craniométrie de l'individu. La position et la forme des yeux, du nez, de la bouche et des oreilles sont déduites à partir de repères crâniens par morphométrie géométrique. De ces 100 points caractéristiques cutanés estimés,



(a) Crâne inconnu.



(b) Placement des points caractéristiques crâniaux avec des épaisseurs de tissus mous moyens propres à chaque point pour estimer les points cutanés correspondants.



(c) Reconstitution du visage par interpolation entre les différents points cutanés.



(d) Résultat après finitions artistiques (ajout de cheveux, correction des traits faciaux, etc.).

Figure 5.14 – Reconstitution faciale par modelage sur crâne (Images issues du site web http ://www.sfu.museum/forensics/).

nous construisons une approximation du visage cible par déformation d'un visage générique synthétique issu du logiciel de modélisation de morphologie humaine MakeHuman [2] sur lequel nous avons placé les points caractéristiques cutanés (cf. Figure 5.18). La déformation se fait itérativement par un calcul de l'influence des déplacements souhaités des points caractéristiques entre eux et sur l'ensemble des points du maillage par une fonction d'amortissement sur la distance.

Une validation par un nouveau prélèvement sur un sous-échantillon démontre une précision moyenne de 4 mm pour le visage global (cf. Figure 5.20). L'approximation qui en résulte est une forme objective probable du visage, mais synthétique et sans texture, et doit être traitée artistiquement avant de l'utiliser pour de la reconnaissance faciale. AFA3D, intégré dans le logiciel TIVMI [3], est disponible en ligne pour d'autres essais par la communauté. Les publications associées sont : [GMC+11] et [GDC+14].

2. http ://www.makehuman.org/
3. http ://www.pacea.u-bordeaux.fr/TIVMI.html

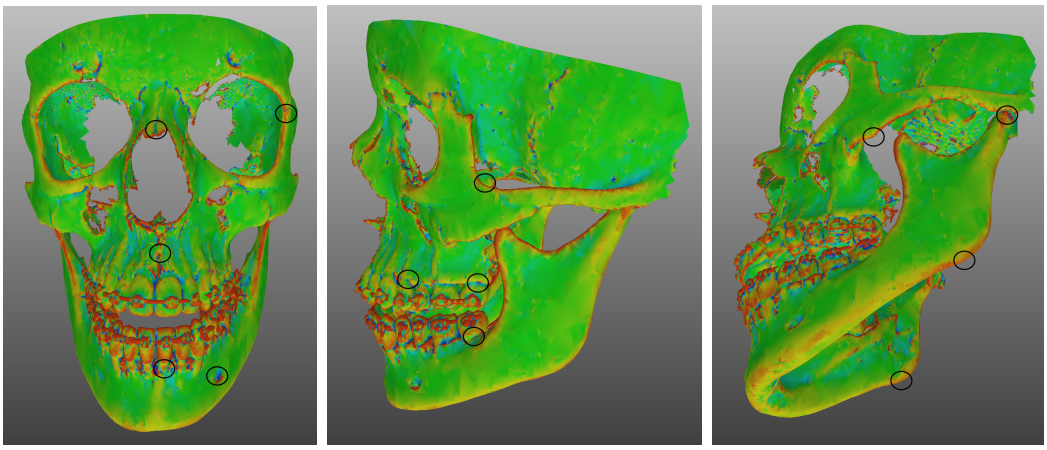


FIGURE 5.15 – Placement des points craniaux

5.2.2 Apports de la thèse pour cette application

Comme décrit précédemment, cette application nécessite le placement d'un ensemble de points caractéristiques crâniaux et faciaux. Actuellement, ces points sont placés à la main. Mais, comme montré dans [GSD+12], le placement des points fait sur 50 individus donne une variabilité de l'ordre d'1 mm (expérience réalisée avec six participants). Toutefois la définition de ces *landmarks* fait appel à des notions de points ou de formes saillantes. Par exemple :

- Le centre du foramen mentonnier est caractérisé comme étant le centre du cercle des contours d'un trou. Donc le centre d'un cercle constitué d'un ensemble de points de forte courbure.
- Le gonion (cf. Figure 5.17) est le point de plus forte courbure dans l'arc de la mandibule.
- Le pterion (cf. Figure 5.17) est l'intersection de trois jonctions d'os du crâne. Ces jonctions sont des crevasses dans le crâne et sont donc des points de fortes courbures.

Dans un premier temps, nous avons utilisé la mise en exergue de la valeur de courbure moyenne par une échelle de couleur, ce qui permet d'aider au placement de ces points (cf. Figure 5.15).

L'objectif final est de faire ce placement de façon semi-automatique par repositionnement de la saisie de façon optimale et reproductible suivant les propriétés différentielles de la surface dans un voisinage du point saisi.

5.2.3 Conclusion

Cette application, qui résulte d'une collaboration avec les membres de PACEA et tout particulièrement Pierre Guyomarc'h, a permis de réaliser une première étape de la reconstitution faciale, *i.e.* la reconstitution globale de la morphologie du visage autrement dit de ses basses fréquences, avec une grande précision à la fois par

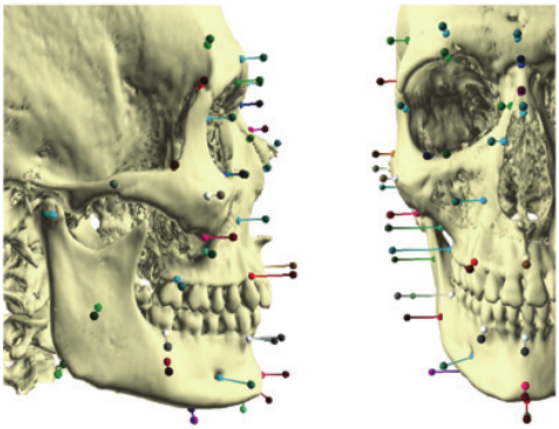


Figure 5.16 – Corrélation entre les points caractéristiques crâniaux et les points caractéristiques cutanés.

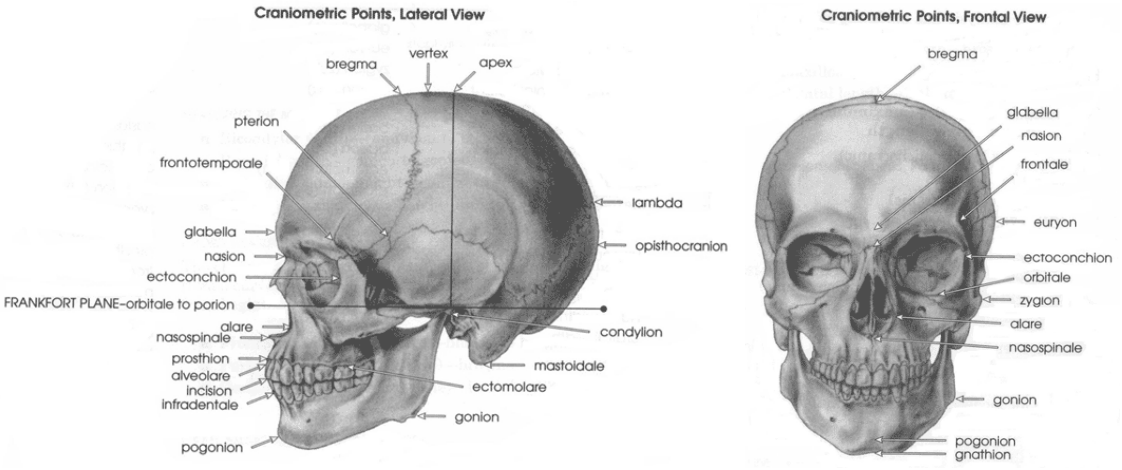


Figure 5.17 – Points craniométriques (illustrations issues du site web http ://www.redwoods.edu/Instruct/AGarwin/anth_6_cranial-landmarks.htm)

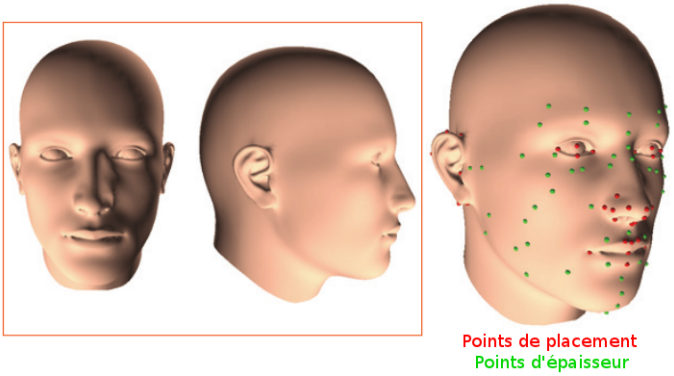


FIGURE 5.18 – Modèle de visage neutre et synthétique issu du logiciel MakeHuman ; avec, à droite, le placement des points caractéristiques cutanés (en rouge les points de positionnement anatomique et en vert les points d'épaisseurs).

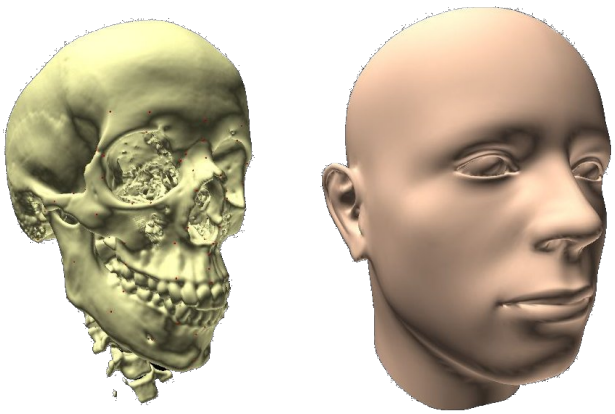


FIGURE 5.19 – Reconstitution faciale informatisée : AFA3D (Anthropological Facial Approximation in Three Dimensions : approximation d'un visage anthropologique en trois dimensions).

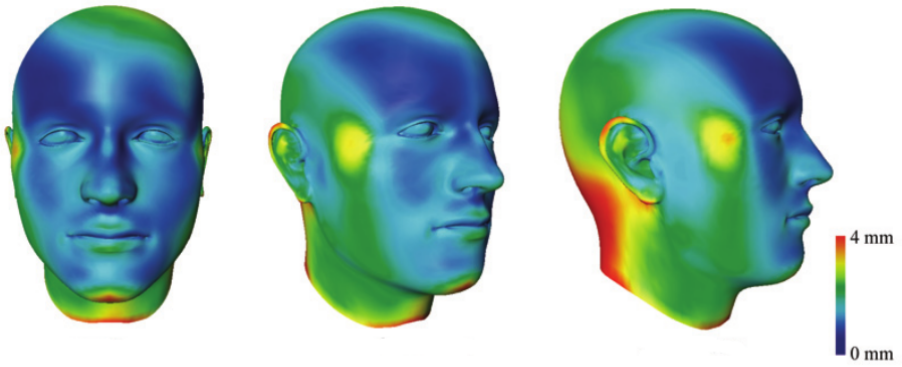
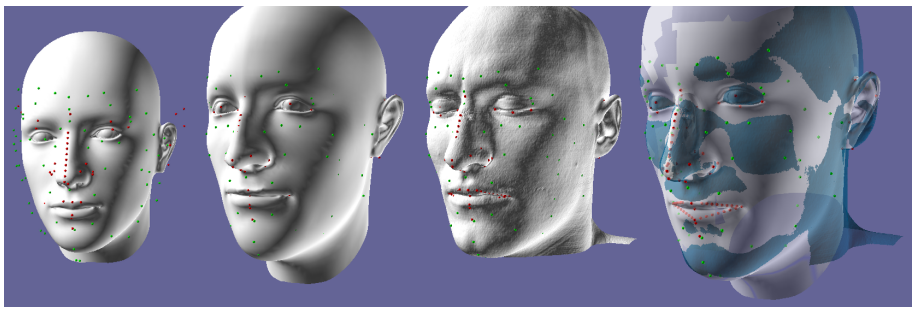
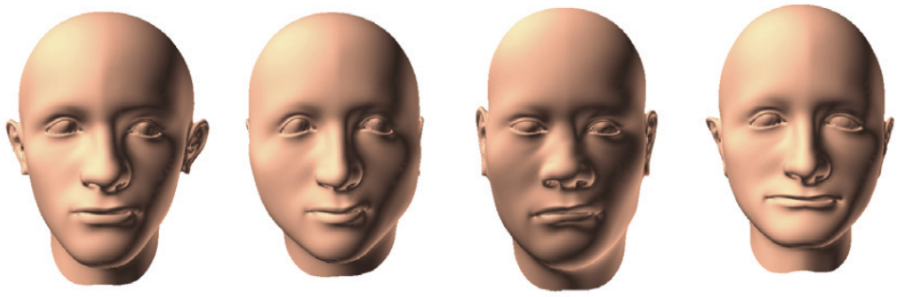


Figure 5.20 – Comparaison en terme de distance de surfaces entre le modèle synthétique calculé et la surface extraite du scanner du patient.



(a) Exemple complet de morphisme du visage neutre vers le visage recherché. De gauche à droite : visage neutre présenté face aux points cutanés recherchés, visage estimé par déformation, visage réel de l'inconnu et la superposition du visage estimé en bleu au visage réel en blanc.



(b) Quatre exemples de différents visages reconstitués.

Figure 5.21 – Exemples de reconstitutions faciales via AFA3D.

l'estimation des points caractéristiques cutanés et par la déformation du maillage représentatif d'un visage neutre défini par MakeHuman. L'évaluation de cette précision à été faite sur un large ensemble d'individus dont on connaît le visage. La seconde étape de la reconstitution faciale est d'apporter au visage reconstitué des traits faciaux qui seraient relatifs à l'âge, au sexe, la corpulence, etc. de l'individu. Ce que l'on appelle aussi les hautes fréquences du visage. Cette seconde étape consiste d'un point de vue technique à ajouter de la texture au maillage et est toujours en cours de recherche.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu deux applications aux apports de cette thèse. La première étant une application dans le domaine du médical, dans laquelle, l'extraction des caractéristiques de saillance pour identifier les cuspides des dents permettra de calculer l'occlusion optimale d'un patient nécessitant une correction maxillofaciale. La seconde étant une application dans le domaine anthropologique, pour laquelle, l'aide à la saisie de points craniométriques par extraction de courbure ou de caractéristiques saillantes propres à la courbure permettra de réduire la variabilité de cette saisie et de ce fait permettra une meilleure estimation du visage reconstitué. Ces deux applications sont toujours à l'état de recherche et donnent des résultats préliminaires prometteurs.

Conclusion

Dans les travaux de cette thèse, nous avons contribué à l'étude des caractéristiques saillantes sur des maillages 3D. Nous avons élaboré une base expérimentale permettant de comparer les différentes méthodes de référence d'estimation de normale et de courbure discrète par rapport aux critères de convergence, de stabilité et de précision de leurs estimations et en fonction de la variation de la distance de discrétisation et de la répartition spatiale des maillages qui en résultent. Cela nous a permis de mettre en évidence les limites des méthodes utilisées à ce jour. Pour pallier ces limites, nous avons proposé deux nouveaux estimateurs.

Nous avons proposé un estimateur de courbure appelé *SineFitting* et un estimateur de normale appelé *ExtendedSineFitting*.

Ces deux estimateurs [CGD13] ont montré au travers des tests réalisés [CGD12] qu'ils sont en moyenne plus précis et plus stables que ceux de référence. L'ensemble de ces tests a été intégré dans une plate-forme destinée à l'évaluation des algorithmes appliqués aux maillages et aux images nD : *SmithDR* [ACDR13].

En parallèle de l'élaboration de ces nouveaux estimateurs, nous avons travaillé sur deux applications, en association avec d'autres laboratoires, auxquelles ces estimateurs seront, entre autres, destinés.

- La première de ces applications a été faite en collaboration avec des membres du CHU Bordeaux. Cette application a pour but d'améliorer la préparation de la chirurgie de correction maxillofaciale par une virtualisation de la planification. L'apport des travaux de cette thèse est de permettre une virtualisation avec positionnement automatique de l'occlusion optimale par utilisation des caractéristiques de courbures maximales pour détecter, identifier et mettre en occlusion les cuspides des dents du patient.
- La seconde, en collaboration avec un laboratoire d'anthropologie (PACEA), est une application qui a pour but de faire de la reconstitution faciale 3D numérique à partir de données statistiques construites sur une large base de connaissance d'individus. L'apport de cette thèse dans cette application est dans le replacement des points craniométriques par utilisation des caractéristiques différentielles qui les définissent.

Ces deux applications en sont encore au stade de la recherche mais toutes deux donnent déjà des résultats prometteurs. La première a montré sa faisabilité [CL12, LCDM14] et la seconde est actuellement partiellement intégrée dans le logiciel TIVMI, destiné aux applications dans le domaine de l'anthropologie, et a été

validée sur un large échantillon d'individus [GDC+14, GMC+11, GSD+12].

Dans nos futurs travaux :

- Sur les estimateurs de propriétés différentielles, nous envisageons d'améliorer ces estimateurs en ajoutant un système de pondération aux méthodes de régression en utilisant un coefficient de fiabilité des évaluations des courbures normales.
- Nous devons finaliser la planification virtuelle de la chirurgie maxillofaciale par calcul de l'occlusion optimale.
- Nous devons finaliser l'automatisation du replacement des points craniométriques pour la reconstitution faciale.

Publications

Journal :

- P. Guyomarc'h, B. Dutailly, J. Charton, F . Santos, P. Desbarats, and H. Coqueugniot. Anthropological facial approximation in three dimensions (afa3d). Journal of Forensic Sciences, 2014.

Conférence internationale :

- M. Laurentjoye, J. Charton, P. Desbarats, and M. Montaudon. Mandibular surgery planning and 3d printed splint design. In CARS 2014 Proceedings, CARS-INT 2014, Fukuoka, Japan, 2014.
- J. Charton, S. Gueorguieva, and P. Desbarats. Sinefiting : robust curvature estimation on surface triangulation. In CGVCVIP 2013 - IADIS International Conference Computer Graphics, Visualization, Computer Vision and Image Processing 2013, pages 43-50, Praha, Czech Republic, July 2013.

Conférence nationale :

- J. Charton, S. Gueorguieva, and P. Desbarats. Courbures discrètes : outils d'évaluation de formes saillantes sur des maillages. In Actes des 25ème journées de l'Associastion Française d'Informatique Graphique Calais, pages 69-83, Calais, France, November 2012.

Poster :

- J. Charton and M. Laurentjoye. Conception virtuelle de guides imprimés de positionnement osseux pour la chirurgie des dysmorphoses maxillo-mandibulaires. Bordeaux, France, 2012.
- P. Guyomarc'h, J. Martin, J. Charton, F. Santos, and B. Dutailly. Anthropological facial approximation in three dimensions (afa3d). In 19ème meeting mondial de l'International Association of Forensic Sciences (IAFS), Portugal, Funchal, Madère, September 2011.

Logiciel :

- C. Aguerre, J. Charton, P. Desbarats, and B. Recur. SmithDR (Scientific Multi maging Tool Handled by a Dag layeR). http ://smithdr.labri.fr/, 2013.

Preuves

Preuve .1 (SineFitting : Transformation de l'équation d'Euler)

Reprenons l'équation d'Euler (1.8) *:* $k_i = k_1 \cos^2(\theta_i) + k_2 \sin^2(\theta_i)$

Cette équation peut se réécrire, par les définitions de α_i *(Équation* (2.41)*) et* ϕ *(Équation* (2.42)*), comme :*

$$\begin{aligned}
k_i &= k_1 \cos^2(\alpha_i + \phi) + k_2 \sin^2(\alpha_i + \phi) \\
k_i &= k_1 \cos^2(\alpha_i + \phi) + k_2 - k_2 \cos^2(\alpha_i + \phi) \\
k_i &= (k_1 - k_2) \cos^2(\alpha_i + \phi) + k_2
\end{aligned}$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *comme suit :*

Si $a \in \mathbb{R}^{*+}$: $\phi = -\frac{\arctan(\frac{b}{a})}{2}$, $k1 = c + \sqrt{a^2+b^2}$ *et* $k2 = c - \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{aligned}
k_i &= ((c + \sqrt{a^2+b^2}) - (c - \sqrt{a^2+b^2})) \cdot \cos^2(\alpha_i - \tfrac{\arctan(\frac{b}{a})}{2}) - \sqrt{a^2+b^2} + c \\
k_i &= 2\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos^2(\alpha_i - \tfrac{\arctan(\frac{b}{a})}{2}) - \sqrt{a^2+b^2} + c \\
k_i &= 2\sqrt{a^2+b^2} \cdot (\tfrac{1}{2}(\cos(2\alpha_i - \arctan(\tfrac{b}{a})) + 1)) - \sqrt{a^2+b^2} + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(2\alpha_i - \arctan(\tfrac{b}{a})) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \big(\cos(2\alpha_i)\cos(\arctan(\tfrac{b}{a})) + \sin(2\alpha_i)\sin(\arctan(\tfrac{b}{a}))\big) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{\cos(2\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{a}\frac{\sin(2\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a\cos(2\alpha_i) + b\sin(2\alpha_i)}{a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a\cos(2\alpha_i) + b\sin(2\alpha_i)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + c \\
k_i &= a\cos(2\alpha_i) + b\sin(2\alpha_i) + c
\end{aligned}$$

Si $a \in \mathbb{R}^{*-}$: $\phi = -\frac{\pi + \arctan(\frac{b}{a})}{2}$, $k1 = c + \sqrt{a^2+b^2}$ *et* $k2 = c - \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{aligned}
k_i &= ((c + \sqrt{a^2+b^2}) - (c - \sqrt{a^2+b^2})) \cdot \cos^2(\alpha_i - \tfrac{\pi + \arctan(\frac{b}{a})}{2}) - \sqrt{a^2+b^2} + c \\
k_i &= 2\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos^2(\alpha_i - \tfrac{\pi + \arctan(\frac{b}{a})}{2}) - \sqrt{a^2+b^2} + c \\
k_i &= 2\sqrt{a^2+b^2} \cdot (\tfrac{1}{2}(\cos(2\alpha_i - (\pi + \arctan(\tfrac{b}{a}))) + 1)) - \sqrt{a^2+b^2} + c \\
\\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot -\cos(2\alpha_i - \arctan(\tfrac{b}{a}))) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot -\big(\cos(2\alpha_i)\cos(-\arctan(\tfrac{b}{a})) - \sin(2\alpha_i)\sin(-\arctan(\tfrac{b}{a}))\big) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot -\big(\cos(2\alpha_i)\cos(\arctan(\tfrac{b}{a})) + \sin(2\alpha_i)\sin(\arctan(\tfrac{b}{a}))\big) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(-\frac{\cos(2\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} - \frac{b}{a}\frac{\sin(2\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(-\frac{|a|}{|a|}\frac{\cos(2\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + \frac{b}{|a|}\frac{\sin(2\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{-|a|\cos(2\alpha_i) + b\sin(2\alpha_i)}{|a|\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}\right) + c \\
k_i &= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{-|a|\cos(2\alpha_i) + b\sin(2\alpha_i)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + c \\
k_i &= -|a|\cos(2\alpha_i) + b\sin(2\alpha_i) + c \\
k_i &= a\cos(2\alpha_i) + b\sin(2\alpha_i) + c
\end{aligned}$$

Si $a = 0$: $\phi = -\operatorname{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{4}$, $k1 = -b + c + |b|$ *et* $k2 = -b + c - |b|$

$$\begin{aligned}
k_i &= 2b\cos^2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4}) - b + c \\
k_i &= b\cos^2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4}) - b + b\cos^2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4}) + c \\
k_i &= b\cos^2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4}) - b\sin^2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4}) + c \\
k_i &= b(\cos^2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4}) - \sin^2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4})) + c \\
k_i &= b\cos(2(\alpha_i - \tfrac{\pi}{4})) + c \\
k_i &= b\cos(2\alpha_i - \tfrac{\pi}{2}) + c \\
k_i &= b\sin(2\alpha_i) + c
\end{aligned}$$

Preuve .2 (*ExtendedSineFitting* : réécriture $\cos(\alpha+\phi) \to e\cdot\cos(\alpha)+d\cdot\sin(\alpha)$)

Soit $f(\alpha_i)$ *une fonction telle que :* $f(\alpha_i) = \delta\cos(\alpha_i+\phi')$

Soit $(d,e)\in\mathbb{R}^2$ *comme suit :*

Si $d\in\mathbb{R}^{*+}$: $\phi' = -\arctan(\frac{e}{d})$ *et* $\delta = \sqrt{d^2+e^2}$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\cos(\alpha_i-\arctan(\tfrac{e}{d}))\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\big(\cos(\alpha_i)\cos(\arctan(\tfrac{e}{d}))+\sin(\alpha_i)\sin(\arctan(\tfrac{e}{d}))\big)\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\left(\frac{\cos(\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{e^2}{d^2}}}+\sin(\alpha_i)\frac{e}{d}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{e^2}{d^2}}}\right)\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\left(\frac{d\cos(\alpha_i)+e\sin(\alpha_i)}{d\sqrt{1+\frac{e^2}{d^2}}}\right)\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\left(\frac{d\cos(\alpha_i)+e\sin(\alpha_i)}{\sqrt{d^2+e^2}}\right)\\
f(\alpha_i) &= d\cos(\alpha_i)+e\sin(\alpha_i)
\end{aligned}
$$

Si $d\in\mathbb{R}^{*-}$: $\phi' = -(\arctan(\frac{e}{d})+\pi)$ *et* $\delta = \sqrt{d^2+e^2}$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\cos(\alpha_i-\pi-\arctan(\tfrac{e}{d}))\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times-\cos(\alpha_i-\arctan(\tfrac{e}{d}))\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times-\big(\cos(\alpha_i)\cos(-\arctan(\tfrac{e}{d}))-\sin(\alpha_i)\sin(-\arctan(\tfrac{e}{d}))\big)\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times-\big(\cos(\alpha_i)\cos(\arctan(\tfrac{e}{d}))+\sin(\alpha_i)\sin(\arctan(\tfrac{e}{d}))\big)\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\left(-\frac{\cos(\alpha_i)}{\sqrt{1+\frac{e^2}{d^2}}}+\sin(\alpha_i)\frac{e}{d}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{e^2}{d^2}}}\right)\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\left(\frac{-|d|\cos(\alpha_i)+e\sin(\alpha_i)}{|d|\sqrt{1+\frac{e^2}{d^2}}}\right)\\
f(\alpha_i) &= \sqrt{d^2+e^2}\times\left(\frac{-|d|\cos(\alpha_i)+e\sin(\alpha_i)}{\sqrt{d^2+e^2}}\right)\\
f(\alpha_i) &= |d|\cos(\alpha_i)+e\sin(\alpha_i)\\
f(\alpha_i) &= d\cos(\alpha_i)+e\sin(\alpha_i)
\end{aligned}
$$

Si $d=0$: $\phi' = -\operatorname{sgn}(e)\cdot\pi/2$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_i) &= 2\cdot e\cos^2(\alpha_i-\pi/4)-e\\
f(\alpha_i) &= e\cos^2(\alpha_i-\pi/4)-e+e\cos^2(\alpha_i-\pi/4)\\
f(\alpha_i) &= e\cos^2(\alpha_i-\pi/4)-e\sin^2(\alpha_i-\pi/4)\\
f(\alpha_i) &= e(\cos^2(\alpha_i-\pi/4)-\sin^2(\alpha_i-\pi/4))\\
f(\alpha_i) &= e\cos(2(\alpha_i-\pi/4))\\
f(\alpha_i) &= e\cos(2\alpha_i-\pi/2)\\
f(\alpha_i) &= e\sin(2\alpha_i)
\end{aligned}
$$

Preuve .3 (Calcul de la correction de la normale)

D'après la construction (cf. Figure 3.16), nous avons :

$$\sin(\nu_R) = \frac{\|\overrightarrow{M_R O_R}\|}{\|\overrightarrow{P_R O_R}\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_R^* P_R}\|}{\|\overrightarrow{P P_R}\|},\ \cos(\nu_R) = \frac{\|\overrightarrow{P P_R^*}\|}{\|\overrightarrow{P P_R}\|} = \frac{\|\overrightarrow{M_R P_R}\|}{\|\overrightarrow{P_R O_R}\|} = \frac{1}{|k_R|}$$

$$\sin(\nu_L) = \frac{\|\overrightarrow{M_L O_L}\|}{\|\overrightarrow{P_L O_L}\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_L P_L^*}\|}{\|\overrightarrow{P P_L}\|},\ \cos(\nu_L) = \frac{\|\overrightarrow{P P_L^*}\|}{\|\overrightarrow{P P_L}\|} = \frac{\|\overrightarrow{M_L P_L}\|}{\|\overrightarrow{P_L O_L}\|} = \frac{1}{|k_L|}$$

$$\rho = \|\overrightarrow{P P_R}\| = \|\overrightarrow{P P_L}\|,\ r_R = \|\overrightarrow{P_R O_R}\| = \|\overrightarrow{P O_R}\|,\ r_L = \|\overrightarrow{P_L O_L}\| = \|\overrightarrow{P O_L}\|$$

$$\|\overrightarrow{M_L O_L}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{P_L O_L}\|^2 - \|\overrightarrow{M_L P_L}\|^2} = \sqrt{r_L^2 - (\frac{\rho}{2})^2},$$

$$\|\overrightarrow{M_R O_R}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{P_R O_R}\|^2 - \|\overrightarrow{M_R P_R}\|^2} = \sqrt{r_R^2 - (\frac{\rho}{2})^2}$$

$$\|\overrightarrow{P_L P_L^*}\| = \frac{\|\overrightarrow{P P_L}\| \cdot \|\overrightarrow{M_L O_L}\|}{\|\overrightarrow{P_L O_L}\|},\ \|\overrightarrow{P_R^* P_R}\| = \frac{\|\overrightarrow{P P_R}\| \cdot \|\overrightarrow{M_R O_R}\|}{\|\overrightarrow{P_R O_R}\|},$$

$$\|\overrightarrow{P P_L^*}\| = \frac{\|\overrightarrow{M_L P_L}\| \cdot \|\overrightarrow{P P_L}\|}{\|\overrightarrow{P_L O_L}\|},\ \|\overrightarrow{P P_R^*}\| = \frac{\|\overrightarrow{M_R P_R}\| \cdot \|\overrightarrow{P P_R}\|}{\|\overrightarrow{P_R O_R}\|}$$

Nous définissions :

$$s_R = \mathrm{sgn}(k_R),\ s_L = \mathrm{sgn}(k_L)$$

Nous reprenons l'Équation (3.46) *:*

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{s_L \cdot \|\overrightarrow{P P_L^*}\| - s_R \cdot \|\overrightarrow{P P_R^*}\|}{\|\overrightarrow{P_L P_L^*}\| + \|\overrightarrow{P_R^* P_R}\|} \\
&= \frac{s_L \cdot \frac{\|\overrightarrow{M_L P_L}\| \cdot \|\overrightarrow{P P_L}\|}{\|\overrightarrow{P_L O_L}\|} - s_R \cdot \frac{\|\overrightarrow{M_R P_R}\| \cdot \|\overrightarrow{P P_R}\|}{\|\overrightarrow{P_R O_R}\|}}{\frac{\|\overrightarrow{P P_L}\| \cdot \|\overrightarrow{M_L O_L}\|}{\|\overrightarrow{P_L O_L}\|} + \frac{\|\overrightarrow{P P_R}\| \cdot \|\overrightarrow{M_R O_R}\|}{\|\overrightarrow{P_R O_R}\|}} \\
&= \frac{s_L \cdot \|\overrightarrow{M_L P_L}\| \cdot \|\overrightarrow{P P_L}\| \cdot \|\overrightarrow{P_R O_R}\| - s_R \cdot \|\overrightarrow{M_R P_R}\| \cdot \|\overrightarrow{P P_R}\| \cdot \|\overrightarrow{P_L O_L}\|}{\|\overrightarrow{P P_L}\| \cdot \|\overrightarrow{M_L O_L}\| \cdot \|\overrightarrow{P_R O_R}\| + \|\overrightarrow{P P_R}\| \cdot \|\overrightarrow{M_R O_R}\| \cdot \|\overrightarrow{P_L O_L}\|} \\
&= \frac{s_L \cdot \frac{\rho^2}{2} \cdot \|\overrightarrow{P_R O_R}\| - s_R \cdot \frac{\rho^2}{2} \cdot \|\overrightarrow{P_L O_L}\|}{\rho \cdot \|\overrightarrow{M_L O_L}\| \cdot r_R + \rho \cdot \|\overrightarrow{M_R O_R}\| \cdot r_L} \\
&= \frac{\rho}{2} \cdot \frac{s_L \cdot r_R - s_R \cdot r_L}{r_R \cdot \sqrt{r_L^2 - \frac{\rho^2}{4}} + r_L \cdot \sqrt{r_R^2 - \frac{\rho^2}{4}}} \\
&= \frac{s_L \cdot r_R - s_R \cdot r_L}{r_R \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot r_L^2}{\rho^2} - 1} + r_L \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot r_R^2}{\rho^2} - 1}} \textit{(Équation (3.47))}
\end{aligned}$$

Bibliographie

[ABK98] Nina Amenta, Marshall Bern, and Manolis Kamvysselis. A new voronoi-based surface reconstruction algorithm. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '98, pages 415–421, New York, NY, USA, 1998. ACM.

[ACDR13] Cédric Aguerre, Jérôme Charton, Pascal Desbarats, and Benoît Recur. Smithdr (scientific multi imaging tool handled by a dag layer). `http://smithdr.labri.fr/`, 2013.

[ACK01] Nina Amenta, Sunghee Choi, and Ravi Krishna Kolluri. The power crust. In *Proceedings of the sixth ACM symposium on Solid modeling and applications*, SMA '01, pages 249–266, New York, NY, USA, 2001. ACM.

[ACSTD07] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, Y. Tong, and M. Desbrun. Voronoi-based variational reconstruction of unoriented point sets. In *Proceedings of the Fifth Eurographics Symposium on Geometry Processing*, SGP '07, pages 39–48, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007. Eurographics Association.

[AKL63] Aleksandr Danilovitch Aleksandrov, Andrei Nikolaevich Kolmogorov, and Mikhail Alekseevich Lavrent'ev. *Mathematics : Its Content, Methods and Meaning*. M.I.T. Press, Cambridge, Mass, USA, 1963.

[BDM05] A. Bac, M. Daniel, and J-L. Maltret. 3d modeling and segmentation with discrete curvatures. *Journal of Medical Informatics and Technology*, 9 :13–24, 2005.

[BG05] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie Différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France, 2ème édition, 2ème tirage, edition, 2005.

[BJ86] P.J. Besl and R. Jain. Invariant surface characteristics for 3d object recognition in range images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 33(1) :33–80, 1986.

[BKL09] Seung-Yeob Baek, Byoung-Youn Kim, and Kunwoo Lee. 3d face model reconstruction from single 2d frontal image. In *Proceedings of the 8th*

International Conference on Virtual Reality Continuum and Its Applications in Industry, VRCAI '09, pages 95–101, New York, NY, USA, 2009. ACM.

[BMR+99] Fausto Bernardini, Joshua Mittleman, Holly Rushmeier, Cláudio Silva, and Gabriel Taubin. The ball-pivoting algorithm for surface reconstruction. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(4) :349–359, October 1999.

[Bon48] O. Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *J.E.P. (Journal de l'École Polytechnique. Paris)*, 19 :1–133, 1848.

[CCLT09] Frédéric Chazal, David Cohen-Steiner, André Lieutier, and Boris Thibert. Stability of curvature measures. *Comput. Graph. Forum*, 28(5) :1485–1496, 2009.

[CGD12] Jérôme Charton, Stefka Gueorguieva, and Pascal Desbarats. Courbures discrètes : outils d'évaluation de formes saillantes sur des maillages. In *Actes des 25ème journées de l'Associastion Française d'Informatique Graphique Calais*, pages 69–83, Calais, France, November 2012.

[CGD13] J. Charton, S. Gueorguieva, and P. Desbarats. Sinefitting : robust curvature estimation on surface triangulation. In *CGVCVIP 2013 - IADIS International Conference Computer Graphics, Visualization, Computer Vision and Image Processing 2013*, pages 43–50, Praha, Czech Republic, July 2013.

[Che95] Evgeni V. Chernyaev. Marching cubes 33 : Construction of topologically correct isosurfaces. Technical report, 1995.

[CL12] J. Charton and M. Laurentjoye. Conception virtuelle de guides imprimés de positionnement osseux pour la chirurgie des dysmorphoses maxillo-mandibulaires. Bordeaux, France, 2012.

[CP03] F. Cazals and M. Pouget. Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets. In *Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, SGP '03, pages 177–187, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2003. Eurographics Association.

[CRR07] Felix Calderon, Ubaldo Ruiz, and Mariano Rivera. Surface-normal estimation with neighborhood reorganization for 3d reconstruction. In *Proceedings of the Congress on pattern recognition 12th Iberoamerican conference on Progress in pattern recognition, image analysis and applications*, CIARP'07, pages 321–330, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.

[CS92] Xin Chen and Francis Schmitt. *Intrinsic Surface Properties from Surface Triangulation.* Télécom Paris, D. École Nationale Supérieure des Télécommunications, 1992.

[CSAD04] David Cohen-Steiner, Pierre Alliez, and Mathieu Desbrun. Variational shape approximation. *ACM Trans. Graph.*, 23(3) :905–914, August 2004.

[DCM76] Manfredo P. Do Carmo M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.

[DGH01] Tamal K. Dey, Joachim Giesen, and James Hudson. Delaunay based shape reconstruction from large data. In *Proceedings of the IEEE 2001 symposium on parallel and large-data visualization and graphics*, PVG '01, pages 19–27, Piscataway, NJ, USA, 2001. IEEE Press.

[DMSB02] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A.H. Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *VisMath*, pages 35–57. Springer-Verlag, 2002.

[DP14] Amaël Delaunoy and Marc Pollefeys. Photometric bundle adjustment for dense multi-view 3d modeling. April 2014.

[FJ89] P.J. Flynn and A.K. Jain. On reliable curvature estimation. In *Computer Vision and pattern recognition*, pages 110–116, 1989.

[FSK+10] R. Furukawa, R. Sagawa, H. Kawasaki, K. Sakashita, Y. Yagi, and N. Asada. One-shot entire shape acquisition method using multiple projectors and cameras. In *Image and Video Technology (PSIVT), 2010 Fourth Pacific-Rim Symposium on*, pages 107–114, Nov 2010.

[Gau00] C.F. Gauss. *Werke : Vol. : 8*. Teubner, 1900.

[Gau12] C.F. Gauss. *Carl Friedrich Gauss Werke*. Nabu Press, 2012.

[GD05] S. Gueorguieva and P. Desbarats. Reconstruction of topology valid boundary of discrete objects from 3D range images. In *Reconstruction of topology valid boundary of discrete objects from 3D range images*, pages 388–393, Spain, 2005.

[GDC+14] P. Guyomarc'h, B. Dutailly, J. Charton, F . Santos, P. Desbarats, and H. Coqueugniot. Anthropological facial approximation in three dimensions (afa3d). *Journal of Forensic Sciences*, 2014.

[GG03] Timothy D. Gatzke and Cindy M. Grimm. Improved curvature estimation on triangular meshes. 2003.

[GG06] Timothy D. Gatzke and Cindy M. Grimm. Estimating curvature on triangular meshes. *International Journal of Shape Modeling*, 12(1), 2006.

[GMC+11] P. Guyomarc'h, J. Martin, J. Charton, F. Santos, and B. Dutailly. Anthropological facial approximation in three dimensions (afa3d). In *19ème meeting mondial de l'International Association of Forensic Sciences (IAFS)*, Portugal, Funchal, Madère, September 2011.

[GS03] Rao V. Garimella and Blair K. Swartz. Curvature estimation for unstructured triangulations of surfaces. Technical Report LA-UR-03-8240, Los Alamos National Laboratory, Nov 2003.

[GSD+12] P. Guyomarc'h, F. Santos, B. Dutailly, P. Desbarats, C. Bou, and H. Coqueugniot. Three-dimensional computer-assisted craniometrics : A comparison of the uncertainty in measurement induced by surface reconstruction performed by two computer programs. *Forensic Science International*, 219(1–3) :221 – 227, 2012.

[Ham91] Bernd Hamann. *Visualization and Modeling of Contours of Trivariate Functions*. 1991.

[Ham92] Bernd Hamann. Curvature approximation for triangulated surfaces. In Gerald E. Farin, Hans Hagen, Hartmut Noltemeier, and Walter Knödel, editors, *Geometric Modelling*, volume 8 of *Computing Supplement*, pages 139–153. Springer, 1992.

[Haz88] Michiel Hazewinkel. *Encyclopaedia of mathematics : an updated and annotated translation of the Soviet "Mathematical encyclopaedia*. Reidel Sold and distributed in the U.S.A. and Canada by Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston Norwell, MA, U.S.A, 1988.

[HW10] Ralf Habel and Michael Wimmer. Efficient irradiance normal mapping. In *Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on Interactive 3D Graphics and Games 2010*, pages 189–195. ACM, February 2010.

[JDZ04] Thouis R. Jones, Fredo Durand, and Matthias Zwicker. Normal improvement for point rendering. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 24(4) :53–56, July 2004.

[JP11] M. Jancosek and T. Pajdla. Multi-view reconstruction preserving weakly-supported surfaces. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on*, pages 3121–3128, June 2011.

[KAWB09] Klaas Klasing, Daniel Althoff, Dirk Wollherr, and Martin Buss. Comparison of surface normal estimation methods for range sensing applications. In *Proceedings of the 2009 IEEE international conference on Robotics and Automation*, ICRA'09, pages 1977–1982, Piscataway, NJ, USA, 2009. IEEE Press.

[KBH06] Michael Kazhdan, Matthew Bolitho, and Hugues Hoppe. Poisson surface reconstruction. In *Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing*, SGP '06, pages 61–70, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2006. Eurographics Association.

[KK05] Hiroaki Kawata and Takashi Kanai. Direct point rendering on gpu. In *Proceedings of the First International Conference on Advances in Visual Computing*, ISVC'05, pages 587–594, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer-Verlag.

[KOFN06] Hiroshi Kawasaki, Yutaka Ohsawa, Ryo Furukawa, and Yasuaki Nakamura. Dense 3d reconstruction with an uncalibrated active stereo system. In P. J. Narayanan, Shree K. Nayar, and Heung-Yeung Shum,

editors, *ACCV (2)*, volume 3852 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 882–891. Springer, 2006.

[KYL02] D. H. Kim, I. D. Yun, and S. U. Lee. Triangular mesh segmentation based on surface normal. In *Proceedings of ACCV2002 : The 5th Asian Conference on Computer Vision*. ACCV2002, 2002.

[LBS07] Torsten Langer, Alexander Belyaev, and Hans-Peter Seidel. Exact and interpolatory quadratures for curvature tensor estimation. *Comput. Aided Geom. Des.*, 24(8-9) :443–463, November 2007.

[LC87] William E. Lorensen and Harvey E. Cline. Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4) :163–169, August 1987.

[LCDM14] M. Laurentjoye, J. Charton, P. Desbarats, and M. Montaudon. Mandibular surgery planning and 3d printed splint design. In *CARS 2014 Proceedings*, CARS-INT 2014, Fukuoka, Japan, 2014.

[Man82] John Mandel. Use of the singular value decomposition in regression analysis. *The American statistician : a publication of the American Statistical Association.*, 1982.

[MD02] J.-L. Maltret and M. Daniel. Discrete curvatures and applications : a survey. Rapport de recherche LSIS.RR.2002.002, Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes, 2002.

[MLBD02] Mark Meyer, Haeyoung Lee, Alan Barr, and Mathieu Desbrun. Generalized barycentric coordinates on irregular polygons. *Journal of Graphics Tools*, 7 :13–22, 2002.

[Mor08] J.-M. Morvan. *Generalized Curvatures*. Springer Series in Geometry and Computing, 2008.

[MV97] Alan M. McIvor and Robert J. Valkenburg. A comparison of local surface geometry estimation methods, 1997.

[MW00] D. S. Meek and D. J. Walton. On surface normal and gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface. *Comput. Aided Geom. Des.*, 17(6) :521–543, July 2000.

[NMdOT01] Luis Gustavo Nonato, Rosane Minghim, Maria Cristina Ferreira de Oliveira, and Geovan Tavares. A novel approach for delaunay 3d reconstruction with a comparative analysis in the light of applications. *Comput. Graph. Forum*, 20(2) :161–174, 2001.

[Pet02] Sylvain Petitjean. A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes. *ACM Computing Surveys No. 34*, 2 :1–61, July 2002.

[San89] P.T. Sander. Generic curvature features from 3-d images. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics*, 19(6) :1623–1636, 1989.

[SDG07] Rémi Synave, Pascal Desbarats, and Stefka Gueorguieva. Automated trimmed iterative closest point algorithm. In *Advances in Visual*

Computing, Third International Symposium, ISVC 2007, Lake Tahoe, NV, USA, November 26-28, 2007, Proceedings, Part II, pages 489–498, 2007.

[Sha73] V.A. Sharafutdinov. Relative euler class and the gauss-bonnet theorem. *Siberian Mathematical Journal*, 14(6) :930–940, 1973.

[SLW02] G.C. Sharp, S.W. Lee, and D.K. Wehe. Icp registration using invariant features. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 24(1) :90–102, 2002.

[SMS+03] T. Surazhsky, E. Magid, O. Soldea, G. Elber, and E. Rivlin. A comparison of gaussian and mean curvatures estimation methods on triangular meshes. In *ICRA*, pages 1021–1026, 2003.

[SOY+09] Ryusuke Sagawa, Yuichi Ota, Yasushi Yagi, Ryo Furukawa, Naoki Asada, and Hiroshi Kawasaki. Dense 3d reconstruction method using a single pattern for fast moving object. In *ICCV*, pages 1779–1786. IEEE, 2009.

[Tau95] Gabriel Taubin. Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation. pages 902–907, Jun 1995.

[Tho79] J Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1979.

[WA04] H.J. Weber and G.B. Arfken. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 2004.

[XX08] Z. Xu and G. Xu. Discrete schemes for gaussian curvature and their convergence. *CoRR*, abs/0804.1046, 2008.

[YHJ+14] Ling-Qi Yan, Miloš Hašan, Wenzel Jakob, Jason Lawrence, Steve Marschner, and Ravi Ramamoorthi. Rendering glints on high-resolution normal-mapped specular surfaces. *ACM Trans. Graph.*, 33(4) :116 :1–116 :9, July 2014.