

# Courbures discrètes: outils d'évaluation de formes saillantes sur des maillages

Jérôme Charton, Stefka Gueorguieva, Pascal Desbarats

{charton,stefka,desbarats}@labri.fr  
UMR 5800, Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique  
Université de Bordeaux 1, France

---

## Résumé

*Cet article présente une étude expérimentale sur un ensemble d'outils pour l'évaluation des formes saillantes sur des maillages à partir des courbures discrètes, la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Deux approches d'estimation des courbures ont été considérées : l'approche "continue" par l'approximation quadratique, et l'approche discrète par moyennage discret. Les performances de ces deux approches ont été analysées en termes de convergence, de précision et de sensibilité au bruit. La saillance des formes géométriques aux points d'intérêt a été estimée de manière qualitative et quantitative.*

*This article presents an experimental framework on a set of tools for the estimation of salient features in 3D mesh models based on mean and Gaussian discrete curvatures. Two approaches of curvature estimation have been considered : the continuous one using quadric approximation, and the discrete one based on discrete spatial averaging. The performance of both approaches has been analysed in terms of convergence, precision and sensitivity to noise. Geometric feature saliency in point of interest has been estimated in qualitative and quantitative manner.*

---

**Mots clé :** modélisation géométrique, géométrie différentielle, courbure moyenne, courbure de Gauss, maillages, descripteurs de surface

## 1. Introduction

Une grande variété d'applications de traitements d'images 3D que ce soient des maillages, des grilles régulières ou des nuages de points, nécessite une connaissance approfondie de la structure différentielle des surfaces discrètes sous-jacentes et ses invariants différentiels [BGge, Mor08] :

-Les invariants intrinsèques, la première forme fondamentale et la courbure de Gauss  $k_G$ , sont liés à une structure métrique locale qui supporte la mesure des éléments de longueur et d'aire sur la surface.

-Les invariants extrinsèques de la surface, la deuxième forme fondamentale et la courbure moyenne, dépendent du plongement de la surface dans l'espace euclidien et permettent une étude quantitative de cette surface. En particulier, la deuxième forme fondamentale mesure le défaut de planéité de la surface au voisinage du point considéré.

La segmentation d'images 3D [BJ88, TF95, HBJJ\*96, BDM05], la reconstruction de surfaces [AV96], l'édition de maillages [KKL02, Sor06], la visualisation stylisée [HHS95,

Int97] et l'appariement et les descripteurs multi-échelle [RK06, CPG09], sont des exemples d'utilisation de l'évaluation des invariants différentiels unanimement reconnus.

Dans le cadre de notre étude nous nous intéressons aux traitements des images 3D issues d'acquisitions au scanner laser. Nous cherchons à évaluer de manière qualitative et quantitative des caractéristiques de formes géométriques appareillées à des zones d'intérêt.

Ainsi, par exemple, l'analyse des images 3D représentant des surfaces articulaires du talus<sup>†</sup> utilise l'évaluation de la courbure dans des points de contact comme l'inversion du signe de la courbure pour localiser les points caractéristiques et les bords des surfaces, et l'ordre de grandeur de la courbure pour contrôler les axes et les amplitudes des mouvements.

Il existe de nombreuses recherches sur l'utilisation des invariants différentiels, la courbure moyenne  $k_H$ , la courbure de Gauss  $k_G$  (ou courbure totale) et le tenseur de la courbure pour l'évaluation de formes saillantes sur des maillages.

---

<sup>†</sup>. Le talus ou l'os astragale est un élément anatomique du pied qui s'articule avec le tibia et la fibula en haut, avec l'os naviculaire en avant, et le calcaneus en bas.

En revanche, les cadres expérimentaux des méthodes d'évaluation des courbures discrètes au sens de [HJBJ\*96] sont disparates et rendent difficile l'analyse comparative. Notre travail est une étude expérimentale sur un ensemble d'outils pour l'évaluation des formes saillantes à partir des courbures discrètes.

## 2. Calcul des courbures discrètes

L'estimation des courbures et leur application pour le traitement d'images 3D est un domaine de recherches actif depuis plusieurs décennies. Des analyses comparatives de différentes méthodes et leurs performances sont accessibles dans : [FJ89, MW00, MD02, Pet02, GS03, SMS\*03, GG06]. Peng et al. [PQKZ03] utilisent trois critères de classification des méthodes de calcul des courbures discrètes :

- D'après les caractéristiques de la surface utilisées pour l'estimation de la courbure : les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 [Ham92, MV97], la normale [MNG04, DW05] ou le tenseur de courbure [Tau95, WB01, DMSB02, PSK\*02, Rus04] ;
- D'après le calcul numérique sous-jacent : analytique (continu) ou numérique (discret). Certaines méthodes analytiques produisent une approximation polynomiale de la surface localement au voisinage du point choisi, par des fonctions quadratiques [Ham92, MV97] ou cubiques [GI04], des développements tronqués de la série de Taylor [CP05] ou des carreaux de Bézier [RB05]. Les invariants sont ensuite estimés par un calcul direct [Gol05].

D'autres méthodes [CS92] sont basées sur l'approximation locale de la surface par une famille de courbes et l'application du théorème de Meusnier (1) et du théorème d'Euler (2) pour le calcul des courbures principales.

- D'après le type de données : plages (grilles) de données [BJ86, TF95, HS03], cartes d'intensités énergétiques [AW98] ou données clairsemées (nuages de points) [MNG04, YQ07, WHH10].

Les maillages issus des reconstructions à partir des acquisitions au scanner laser présentent la particularité d'être à la fois irréguliers et clairsemés. La qualité des maillages sous-jacents au sens de [PB03] varie de manière importante et affecte la robustesse et la précision des approximations des invariants différentiels.

Notre outil d'évaluation de formes saillantes comprend deux méthodes de calcul de la courbure moyenne  $k_H$  et de la courbure de Gauss  $k_G$  : une méthode "continue" basée sur l'approximation quadratique de la surface [MV97] et une méthode "discrète" qui utilise le déficit angulaire et la discrétisation du théorème de Gauss-Bonnet [Mey04].

### 2.1. Géométrie différentielle des surfaces

Nous résumons quelques éléments de base liés à la structure différentielle des surfaces. Pour un exposé détaillé on pourra se référer à [BGge, Spi70].

Soit une surface  $S$ , une variété 2D plongée en  $\mathbb{R}^3$  illustrée sur la Fig. 1(a). Pour tout point  $P$  de  $S$ , la surface  $S$  pourra être approximée localement par son plan tangent. Soit  $n$  la normale de  $S$  en  $P$  et  $e_\theta$  un vecteur unitaire du plan tangent. Le théorème de Meusnier énonce que toutes les courbes  $c$  sur une surface, passant par un point donné  $P$  et ayant la même

tangente  $e_\theta$  au point  $P$ , ont aussi la même courbure normale  $k^N(\theta)$  au point  $P$  :

$$k^N(\theta) = k_c \cdot \cos(\phi) \quad (1)$$

$k_c$  est la courbure de  $c$  au point  $P$  et  $\phi$  est l'angle entre  $e_\theta$  et  $n$ .

Les courbures principales  $k_1$  et  $k_2$  de  $S$  en  $P$  sont les valeurs extrémales de la courbure normale  $k^N(\theta)$  selon les différentes orientations de  $e_\theta$ . Les directions  $e_1$  et  $e_2$ , pour lesquelles  $k_1$  et  $k_2$  sont obtenues, sont nommées directions principales.

Le théorème d'Euler fournit  $k^N(\theta)$  en fonction de  $k_1$  et  $k_2$  :

$$k^N(\theta) = k_1 \cdot \cos(\theta_2)^2 + k_2 \cdot \sin(\theta_2)^2 \quad (2)$$

L'angle  $\theta_2$  est l'angle entre la direction principale  $e_2$  et  $e_\theta$ . La courbure moyenne  $k_H$  est calculée à partir de  $k^N(\theta)$  :

$$k_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k^N(\theta) d\theta \quad (3)$$

La courbure de Gauss  $k_G$  est obtenue à partir de  $k_1$  et  $k_2$  :

$$k_G = k_1 k_2 \quad (4)$$

### 2.2. Calcul des courbures discrètes par approximation quadratique

Pour calculer la courbure de la surface  $S$  au point  $P$ , McIvor et al. [MV97] utilisent une approximation locale de la surface par une forme quadratique.

Soit  $X$  le repère orthonormal centré au point  $P$ ,  $X = [x, y, z]^T$ , l'axe  $z$  colinéaire à la normale  $n$ , et les axes  $x$  et  $y$  colinéaires aux directions principales  $e_1$  et  $e_2$ .

Dans le repère  $X$ , la surface  $S$  est représentée localement en  $P$  par la forme quadratique principale [BGge]

$$z = ax^2 + cy^2 \quad (5)$$

Avec les coefficients  $a = \frac{k_1}{2}$  et  $c = \frac{k_2}{2}$ .

Pour calculer la forme quadratique principale (5), McIvor et al. utilisent son image par rotation autour de la normale.

Soit  $\hat{X}$  le repère orthonormal centré au point  $P$ ,  $\hat{X} = [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]^T$ , l'axe  $\hat{z}$  colinéaire à la normale  $n$ .

Dans le repère  $\hat{X}$ , la surface  $S$  est représentée par :

$$\hat{z} = a' \hat{x}^2 + b' \hat{x} \hat{y} + c' \hat{y}^2 \quad (6)$$

La rotation  $\rho_z$  autour de la normale  $n$  à l'angle  $\Theta$

$$\Theta = \frac{1}{2} \text{atan2}(b', a' - c') \quad (7)$$

transforme  $\hat{X}$  en  $X$  et (6) en (5)

$$X = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{X} \quad (8)$$

Les coefficients  $a$  et  $c$  sont donnés par :

$$a = \frac{a' + c' + \sqrt{(a' - c')^2 + (b')^2}}{2} \quad (9)$$

‡. On suppose que  $k_1$  est la valeur maximale de  $k^N(\theta)$  et  $k_2$  est la valeur minimale de  $k^N(\theta)$

$$b = \frac{a' + c' - \sqrt{(a' - c')^2 + (b')^2}}{2} \quad (10)$$

Comme indiqué, l'avantage de construire (6) à la place de (5) est que le problème de l'évaluation de la forme quadratique principale est partagé en deux sous- problèmes séparés : en premier l'évaluation de la normale qui a toujours une solution unique pour les surfaces continues, et ensuite, l'évaluation des directions principales, qui pour des points ombilics a une infinité de solutions. § L'évaluation des courbures discrètes par approximation quadratique est composée par les étapes suivantes :

- L'estimation de la normale  $n$  au point  $P$ .
- L'estimation de  $\hat{X}$

$$\hat{X} = \hat{R}(X_w - X_w^P) \quad (11)$$

$X_w^P$  dénote les coordonnées du point  $P$  dans le repère global  $X_w$

$$\hat{R} = [r_1 \ r_2 \ r_3] \quad (12)$$

$$r_3 = n \quad (13)$$

$$r_1 = \frac{(I - nn^T)e_1}{\|(I - nn^T)e_1\|} \quad (14)$$

$$r_2 = n \times r_1 \quad (15)$$

- L'estimation de (6)

Pour palier aux erreurs d'estimation de  $n$  deux variations de (6) sont utilisées :

$$\hat{z} = a' \hat{x}^2 + b' \hat{x} \hat{y} + c' \hat{y}^2 + d' \hat{x} + e' \hat{y} \quad (16)$$

$$\hat{z} = a' \hat{x}^2 + b' \hat{x} \hat{y} + c' \hat{y}^2 + d' \hat{x} + e' \hat{y} + f' \quad (17)$$

Une analyse comparative des différentes variantes de la méthode d'évaluation de courbures discrètes par approximation quadratique est donnée par [MV97]. Leurs expérimentations démontrent que pour la précision de l'évaluation, l'importance du choix de la forme quadratique, (6), (16) ou (17), est secondaire par rapport au choix de la méthode d'estimation de la normale  $n$  au point  $P$ . La convergence et l'analyse asymptotique de l'erreur est étudiée par [GS03]. Les cas particuliers ou les voisinages des points d'intérêt comportent un nombre non-approprié de points ¶ restent un goulet d'étranglement des réalisations connues.

### 2.3. Calcul des courbures discrètes par moyennage discret

Meyer et al. définissent une méthode de calcul de la courbure discrète ponctuelle sur les sommets de maillages sup-

§. Dans les points ombilics  $k_1 = k_2$  alors tout  $e_\theta$  est une direction principale et en conséquence on pourra choisir  $\Theta = 0$ .

¶. Pour la méthode (17) il est nécessaire que le sommet correspondant ait une valence de 6 or il est courant d'avoir des sommets avec une valence différente comme par exemple l'apex d'un cône, les pôles d'une sphère ou les points appartenant à un bord de la surface.

portés par des surfaces continues ¶. Si on considère une infinitésimale région autour de  $P$ , la courbure moyenne  $k_H$  et la courbure de Gauss  $k_G$  en  $P$  peuvent être exprimées ainsi :

$$2k_H n = \lim_{diam(A) \rightarrow 0} \frac{\nabla A}{A} \quad (18)$$

$$k_G = \lim_{diam(A) \rightarrow 0} \frac{\nabla A^G}{A} \quad (19)$$

Les notations utilisées sont  $A$ , l'aire de l'infinitésimale région autour de  $P$ ,  $diam(A)$ , diamètre de  $A$ ,  $\nabla A$  gradient de  $A$ , et  $A^G$ , l'image de  $A$  par la carte de Gauss.

Meyer et al. utilisent le moyennage spatial pour le calcul des limites dans (18) et (19).

Ainsi, à tout sommet  $x_i$  du maillage on fait correspondre un voisinage  $N_1(i)$  composé par les triangles  $(x_i, x_j, x_{j+1})$ , ou  $(x_i, x_j)$ ,  $(x_i, x_{j+1})$  et  $(x_j, x_{j+1})$  sont des arêtes du maillage comme illustré sur la Fig. 1(b).

La courbure moyenne  $k_H(x_i)$  et la courbure de Gauss  $k_G(x_i)$  au sommet  $x_i$  sont définies :

$$2k_H(x_i)n(x_i) = \frac{\sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(x_i - x_j)}{A_{Mixed}} \quad (20)$$

$$k_G(x_i) = \frac{2\pi - \sum_{j=1}^{\#f} \theta_j}{A_{Mixed}} \quad (21)$$

$n(x_i)$  est la normale au sommet  $x_i$  et  $A_{Mixed}$  est l'aire d'une région autour de  $x_i$  calculée à partir d'une triangulation de  $N_1(i)$ ,  $\#f$  étant le nombre de faces voisines de  $x_i$  comme illustré sur la Fig. 1(c,d).

Introduits par [Mey04] les opérateurs différentiels discrets (20) et (21) sont devenus une méthode de référence pour le calcul des courbures discrètes ponctuelles sur des maillages représentant des approximations linéaires par morceaux de surfaces continues. Il existe des majorations de l'erreur de calcul des  $k_H$  et  $k_G$  discrètes en comparaison avec les courbures continues [F.O07]. Cependant, l'hypothèse a priori sur les surfaces approximées est trop restrictive. Deux problèmes sont formulés par [Bor07] : le "problème de la cohérence", lié à la convergence de la courbure discrète ponctuelle vers la courbure lisse, et le "problème de l'effectivité" lié à l'absence d'une surface lisse qu'on approxime. Des solutions de ces deux problèmes sont connues uniquement pour des cas particuliers [XX08].

## 3. Cadre expérimentale

### 3.1. Images 3D

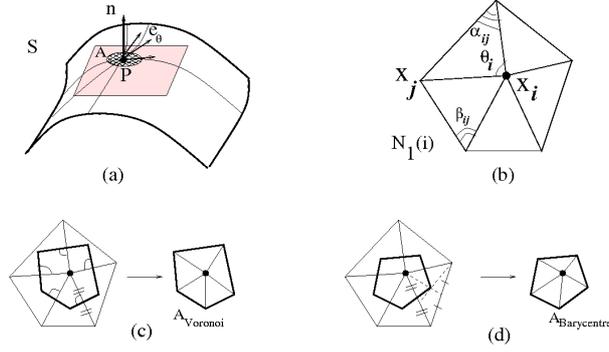
#### 3.1.1. Maillages synthétiques

L'ensemble de maillages synthétiques utilisés est donné sur la Fig.2.

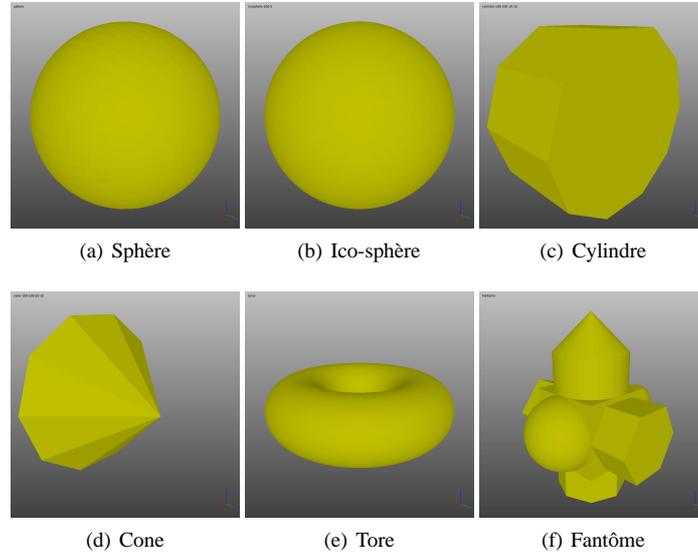
Les primitives géométriques sont générés sous LIBa2ri\*\*.

¶. Un maillage au sens de [Mey04] est soit une limite d'une famille de surfaces continues soit une "bonne" approximation linéaire d'une surface arbitraire"

\*\* . <http://liba2ri.free.fr/>



**Figure 1:** Courbure discrète ponctuelle : (a) Voisinage d'un point  $P$  sur une surface continue (b) Voisinage  $N_1(i)$  d'un sommet  $x_i$  sur un maillage (c) Triangulation en cellules de Voronoï (d) Triangulation en cellules barycentriques.



**Figure 2:** Maillages synthétiques

Le modèle "Fantôme" 3D est conçu par B.Dutailly<sup>††</sup> sous Blender<sup>‡‡</sup>.

### 3.1.2. Maillages synthétiques de surfaces analytiques de référence

Les exemples des surfaces analytiques de référence utilisées pour tester notre outil sont issues de [Ham92] :

$$P = 0.2 * (x + y) \quad (22)$$

$$C = \sqrt{2 - x^2} \quad (23)$$

$$S = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \quad (24)$$

$$P_r = 0.4 * (x^2 + y^2) \quad (25)$$

$$H = 0.4 * (x^2 - y^2) \quad (26)$$

$$M = 0.2 * (x^3 - 3 * x * y^2) \quad (27)$$

$$C_p = 0.15 * (x^3 + 2 * x^2 * y - x * y^2 + 2 * y^3) \quad (28)$$

$$E = e^{\frac{x^2 + y^2}{-2}} \quad (29)$$

$$T = 0.1 * (\cos(\pi * x) + \cos(\pi * y)) \quad (30)$$

Ces exemples couvrent l'ensemble des surfaces d'après la classification proposée par [BJ86] et qui se base sur l'évaluation des signes de la courbure moyenne  $k_H$  et de la courbure de Gauss  $k_G$  comme illustré sur la Fig. 3.

Les surfaces sont illustrées sur la Fig. 4

### 3.1.3. Maillages de référence

L'ensemble de maillages de référence utilisé est issu de <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/> et <http://thefree3dmodels.com>, et illustré sur la Fig. 5.

<sup>††</sup>. <http://www.pacea.u-bordeaux1.fr/Fichedutailly.html>

<sup>‡‡</sup>. <http://www.blender.org>

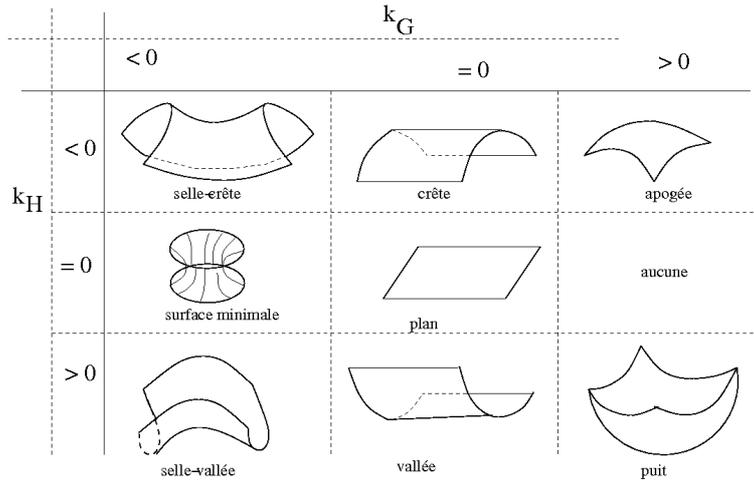


Figure 3: Classification des surfaces d'après les signes de  $k_H$  et  $k_G$ .

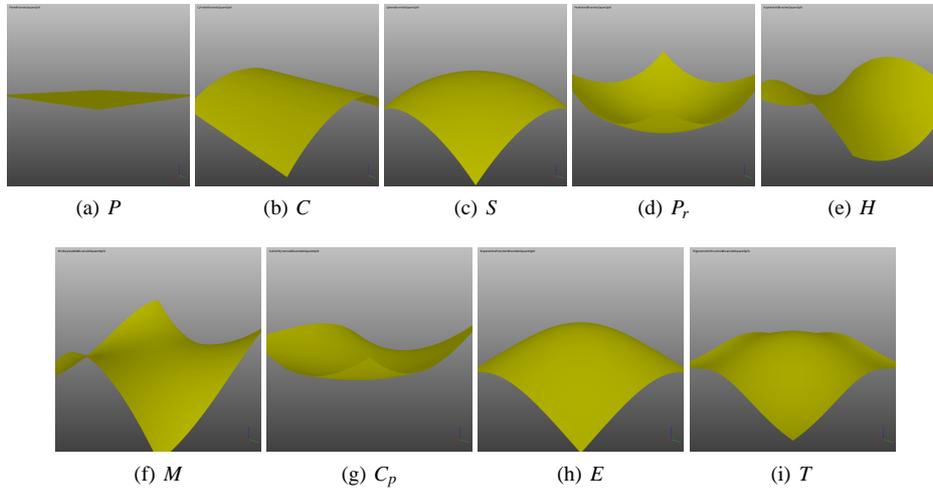


Figure 4: Exemples tests : (a) Plan  $P$  (b) Cylindre  $C$  (c) Sphère  $S$  (d) Paraboloid  $P_r$  (e) Hyperboloid  $H$  (f) "Monkey saddle"  $M$  (g) Polynôme cubique  $C_p$  (e) Fonction exponentielle  $E$  (h) Polynôme trigonométrique  $T$

### 3.1.4. Maillages reconstruits à partir d'acquisition au scanner laser

Le scanner laser utilisé pour l'acquisition d'un talus de la collection ostéologique de Pessac et de l'impression 3D du "Fantôme" est un scanner Kréon §§ Aquilon ¶¶. L'imprimante 3D utilisée est une imprimante Objet Eden250 ¶¶¶. La reconstruction est effectuée sous Geomagic \*\*\* Les maillages sont illustrés sur la Fig. 6

§§. <http://www.kreon.fr/>

¶¶. <http://www.cadcam.com.my/kreon-aquilon.html>

¶¶¶. [http://fr.objet.com/Produits/La\\_Gamme\\_Eden/](http://fr.objet.com/Produits/La_Gamme_Eden/)

\*\*\*. Geomagic, Kreon Tech., <http://www.geomagic.com/en/community/press-releases/kreon-plugin-for-geomagic-software-offers-real-time-scanning-vi/>

## 3.2. Méthodologie expérimentale

### 3.2.1. Tests de convergence des algorithmes de calcul des courbures discrètes

Pour tester la convergence des méthodes de calcul de  $k_H$  et de  $k_G$  nous avons mis au point trois types de voisinages. Nous avons repris l'idée de [GS03] : au point d'intérêt  $P$  de la surface  $S$  on construit une boule 3D,  $B(P,L)$ , centrée en  $P$  et de rayon  $L$  comme illustré sur la Fig. 7(a).

On approxime la courbe d'intersection  $c_L$  de  $S$  et  $B(P,L)$ ,  $c_L = \{S \cap B(P,L)\}$  par un polygone  $p_L$ ,  $p_L = \{P_i^L\}_{i=0}^{n-1}$ . On considère le voisinage  $N_L(P)$  composé par les triangles  $(P, P_i^L, P_{i+1}^L)$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $P_n^L = P_0^L$  et  $n = 6$ .

Soit  $k_H^L(P)$ , la courbure moyenne, et  $k_G^L(P)$ , la courbure de Gauss, au point  $P$ , calculées par approximation quadratique ou par moyennage discret à l'aide du voisinage  $N_L(P)$ .

Le test de convergence du calcul de  $k_H$  et de  $k_G$  consiste à prouver que si  $\lim_{L \rightarrow 0} N_L(P) = P$  alors  $\lim_{L \rightarrow 0} k_H^L(P) = k_H(P)$  et

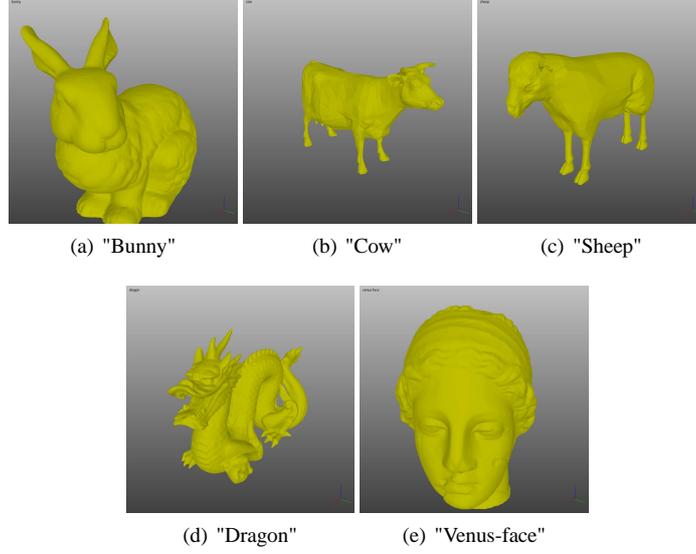


Figure 5: Maillages de référence

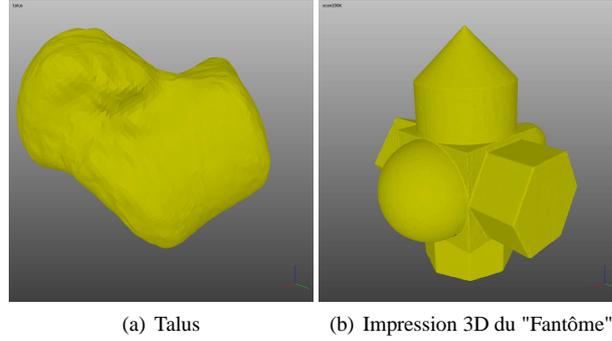


Figure 6: Maillages reconstructions à partir d'acquisition au laser scanner

$$\lim_{L \rightarrow 0} k_G^L(P) = k_G(P).$$

L'illustration de la construction de  $N_L(P)$  pour une primitive géométrique, une sphère  $S$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ , est donnée sur la Fig. 7.

Pour simplifier les calculs, on choisit  $S$  centrée en  $(0,0,0)$  et  $P=(L,0,0)$ .

Une vue dans le plan  $Y=0$  est donnée sur la Fig. 7(b). La projection de  $c_L$  sur  $Y=0$  est  $P^*P^{**}$ . Soit  $h$  la hauteur au point  $P^*$  du triangle  $(O,P,P^*)$ . On peut calculer  $h$  en fonction de  $R$  et  $L$  comme il suit.

On calcule l'aire  $A_{(O,P,P^*)}$  du triangle  $(O,P,P^*)$  par la formule d'Héron et on substitue  $\|OP\| = \|OP^*\| = R$  et  $\|PP^*\| = L$ :

$$P_{(O,P,P^*)} = \frac{\|OP\| + \|PP^*\| + \|OP^*\|}{2} = R + \frac{L}{2} \quad (31)$$

$$A_{(O,P,P^*)} = \sqrt{P_{(O,P,P^*)}(P_{(O,P,P^*)} - R)(P_{(O,P,P^*)} - L)(P_{(O,P,P^*)} - R)} \quad (32)$$

$$= \frac{L}{2} \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \quad (33)$$

$$h = \frac{2A_{(O,P,P^*)}}{R} = L \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \quad (34)$$

D'après (34), si  $L \rightarrow 0$  alors  $h \rightarrow 0$ .

Nous avons généralisé le test de convergence de [GS03] en considérant trois types de voisinages :

- Un voisinage régulier  $N_{Lregulier}(P)$ , illustré sur la Fig. 7(c), avec des sommets  $P_i^L = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $0 \leq i \leq 5$  :

$$x_i = \sqrt{R^2 - h^2} \quad (35)$$

$$y_i = h \cos(2\pi * \frac{i}{6} + \pi/2) \quad (36)$$

$$z_i = h \cos(2\pi * \frac{i}{6} + \pi/2) \quad (37)$$

- Un voisinage irrégulier  $N_{LirregulierSommet}(P)$  obtenu de  $N_{Lregulier}(P)$  en déplaçant un sommet sur  $S$ . Dans l'exemple de la Fig. 7(d) c'est le sommet  $P_5^L$ . Pour obtenir une équivalence avec le voisinage de [GS03], les coordonnées polaires de  $P_5^L = (\theta, \phi)$  sont transformées en  $(\theta, 1.6 * \phi)$ .

- Un voisinage irrégulier  $N_{LirregulierAngles}(P)$  obtenu de  $N_{Lregulier}(P)$  par un échantillonnage régulier le long de l'axe  $Z$ . Dans l'exemple de la Fig. 7(e), les points  $P_0^L$  et  $P_3^L$  sont

inchangés, les coordonnées  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$  sont calculées d'après (35), pour les coordonnées  $z$ ,  $z_1 = z_5 = z_0 + \frac{2h}{3}$  et  $z_2 = z_4 = z_0 + \frac{4h}{3}$ , et les coordonnées  $y$ ,  $y_i = \sqrt{L^2 - z_i^2}$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$

### 3.2.2. Évaluation de la précision

La précision du calcul des courbures discrètes est évaluée sur des maillages obtenus par un échantillonnage régulier des surfaces analytiques pour lesquelles les courbures sont calculées de manière directe d'après [Gol05].

Soit  $F(x, y, z) = 0$  une surface implicite, le gradient  $\nabla F$ , la matrice hessienne  $H(F)$  et  $H^*(F)$  l'adjoint de  $H(F)$ .

Soit  $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ,  $F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  et  $F_{xz} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$ .

Les notations pour les autres dérivées partielles sont obtenues par symétrie.

Soit  $Cofactor(F_{xx}) = F_{yy}F_{zz} - F_{yz}F_{zy}$ ,  $Cofactor(F_{xy}) = F_{yz}F_{zx} - F_{yx}F_{zz}$ ,  $Cofactor(F_{xz}) = F_{yx}F_{zy} - F_{yy}F_{zx}$ .

Les notations pour les autres  $Cofactor(F_{--})$  sont obtenues par symétrie.

$$\nabla F = (F_x F_y F_z) \quad (38)$$

$$H(F) = \nabla(\nabla F) \quad (39)$$

$$H^* = \begin{bmatrix} Cofactor(F_{xx}) & Cofactor(F_{xy}) & Cofactor(F_{xz}) \\ Cofactor(F_{yx}) & Cofactor(F_{yy}) & Cofactor(F_{yz}) \\ Cofactor(F_{zx}) & Cofactor(F_{zy}) & Cofactor(F_{zz}) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Le calcul direct de  $k_H$  et  $k_G$  d'après [Gol05] est donné par :

$$k_H = \frac{\nabla F H(F) (\nabla F)^T - |\nabla F|^2 \text{Trace}(H)}{2|\nabla F|^3} \quad (41)$$

$$k_G = \frac{\nabla F H^*(F) (\nabla F)^T}{|\nabla F|^4} \quad (42)$$

### 3.2.3. Évaluation de la qualité des maillages

Selon l'échantillonnage des surfaces analytiques, uniforme ou non, ou selon les reconstructions à partir des acquisitions de surfaces de forme libre, les maillages obtenus ont une qualité très variable. La forme géométrique des triangles sous-jacents, par exemple, peut être étirée et provoquer des erreurs dans l'évaluation des normales et des courbures discrètes aux sommets voisins\*\*\* Soit un triangle de côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et de hauteurs  $h_a$ ,  $h_b$  et  $h_c$ . Nous utilisons l'aspect ratio  $AR$ ,  $AR = \frac{\max(h_a, h_b, h_c)}{\max(a, b, c)}$  pour contrôler la qualité des maillages.

### 3.2.4. Évaluation de la sensibilité au bruit

L'estimation des caractéristiques différentielles sur des images 3D acquises est extrêmement sensible au bruit [TF95].

Pour estimer la sensibilité des algorithmes en présence de bruit nous étudions deux cas : un bruitage "naturel" dû à la chaîne d'acquisition, et un bruitage "synthétique" le long d'une direction : un axe choisi aléatoirement ou la normale

à la surface au point. L'amplitude du bruit est choisie d'un facteur de  $10^{-3}$  de la diagonale de la boîte englobante du maillage.

## 4. Résultats

Tous les algorithmes d'évaluation des courbures discrètes et les outils d'extraction, d'évaluation et de visualisation de formes saillantes sont implémentés sous la forme de plugins d'une plateforme d'analyse et de reconstruction d'images 3D nommée SmithDR\*\*\*. Les résultats des évaluations des courbures  $k_H$  et  $k_G$  sur l'ensemble de maillages, issus d'objets synthétiques ou réels, sont disponibles sur [http://dept-info.labri.fr/~charton/curvature\\_analysis/](http://dept-info.labri.fr/~charton/curvature_analysis/).

### 4.1. Convergence des algorithmes

Sur les trois tests de convergence illustrés ici, le maillage est un échantillonnage régulier d'une sphère  $S$  centrée en  $(0, 0, 0)$  et de rayon  $R = 2cm$ . Les valeurs théoriques sont respectivement  $k_H(P) = 0.5$  et  $k_G(P) = 0.25$ .

Le tableau Tab. 1 illustre la convergence des méthodes de calcul des courbures discrètes d'après le voisinage  $N_{Lregulier}$ . L'aspect ratio  $AR$  de  $N_{Lregulier}$  est caractérisé par les valeurs suivantes : valeur minimale  $AR_{min} = 0.847215$ , valeur maximale  $AR_{max} = 0.847215$ , valeur moyenne  $AR_{mean} = 0.847215$  et écart type  $AR_{\sigma} = 2.12592e - 16$ .

L	$K_H^{SDA}$	$K_H^{SOFA}$	$K_H^{EQFA}$	$K_G^{SDA}$	$K_G^{SOFA}$	$K_G^{EQFA}$
0.5	0.5	0.507937	0.507937	0.253296	0.257999	0.257999
0.45	0.5	0.506409	0.506409	0.252664	0.25645	0.25645
0.4	0.5	0.505051	0.505051	0.2521	0.255076	0.255076
0.3	0.5	0.502828	0.502828	0.251177	0.252836	0.252836
0.25	0.5	0.501961	0.501961	0.250816	0.251965	0.251965
0.2	0.5	0.501253	0.501253	0.250522	0.251255	0.251255
0.15	0.5	0.500704	0.500704	0.250293	0.250705	0.250705
0.1	0.5	0.500313	0.500313	0.25013	0.250313	0.250313
0.05	0.5	0.500078	0.500078	0.250033	0.250078	0.250078
0.005	0.5	0.500001	0.500001	0.25	0.250001	0.250001
0.0005	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25

**Table 1:** Test de convergence d'après le voisinage régulier  $N_{Lregulier}(P)$

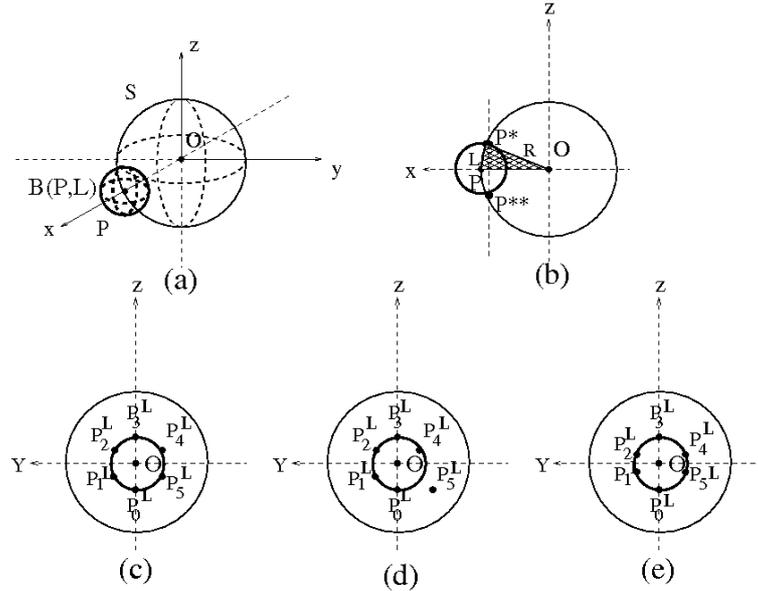
Le tableau Tab. 2 illustre la convergence du calcul des courbures discrètes d'après le voisinage  $N_{LirregulierSommet}$ . L'aspect ratio  $AR$  de  $N_{LirregulierSommet}$  est caractérisé par les valeurs suivantes :  $AR_{min} = 0.608575$ ,  $AR_{max} = 0.847215$ ,  $AR_{mean} = 0.78225$  et  $AR_{\sigma} = 0.0952829$ .

Et finalement, le tableau Tab. 3, décrit la convergence des méthodes d'après un calcul sur un voisinage irrégulier par perturbation d'angles  $N_{LirregulierAngles}(P)$ .

L'aspect ratio  $AR$  de  $N_{LirregulierAngles}$  est caractérisé par les valeurs suivantes :  $AR_{min} = 0.610953$ ,  $AR_{max} = 0.74162$ ,  $AR_{mean} = 0.698064$  et  $AR_{\sigma} = 0.0615968$ .

\*\*\*. Le calcul de l'aire d'un triangle "aplati" est mal conditionné et peut provoquer une erreur dans l'estimation de (20) et (21)

\*\*\*. <http://dept-info.labri.fr/~charton/SmithDR/>



**Figure 7:** Construction de voisinage  $N_L(P)$  : (a) Construction de la boule  $B(P,L)$  (b) Calcul de  $h$  (c) Voisinage régulier (d) Voisinage irrégulier par perturbation d'un sommet (e) Voisinage irrégulier par perturbation des angles

L	$K_H^{SDA}$	$K_H^{SQFA}$	$K_H^{EQFA}$	$K_G^{SDA}$	$K_G^{SQFA}$	$K_G^{EQFA}$
0.5	0.500033	0.505011	0.508415	0.253547	0.254911	0.258485
0.45	0.500027	0.503364	0.506798	0.252867	0.253248	0.256843
0.4	0.500022	0.501898	0.505358	0.252261	0.251773	0.255386
0.3	0.500012	0.4995	0.503002	0.251268	0.249368	0.25301
0.25	0.500009	0.498563	0.502081	0.25088	0.248431	0.252085
0.2	0.500006	0.497799	0.50133	0.250562	0.247669	0.251332
0.15	0.500003	0.497206	0.500747	0.250316	0.247078	0.250748
0.1	0.500001	0.496783	0.500332	0.25014	0.246657	0.250332
0.05	0.5	0.49653	0.500083	0.250035	0.246405	0.250083
0.005	0.5	0.496447	0.500001	0.25	0.246322	0.250001
0.0005	0.5	0.496446	0.5	0.25	0.246321	0.25

**Table 2:** Test de convergence d'après le voisinage régulier  $N_{LirregulierSommet}(P)$

L	$K_H^{SDA}$	$K_H^{SQFA}$	$K_H^{EQFA}$	$K_G^{SDA}$	$K_G^{SQFA}$	$K_G^{EQFA}$
0.5	0.5	0.507937	0.507937	0.253386	0.257999	0.257999
0.45	0.5	0.506409	0.506409	0.252736	0.25645	0.25645
0.4	0.5	0.505051	0.505051	0.252157	0.255076	0.255076
0.3	0.5	0.502828	0.502828	0.251209	0.252836	0.252836
0.25	0.5	0.501961	0.501961	0.250839	0.251965	0.251965
0.2	0.5	0.501253	0.501253	0.250536	0.251255	0.251255
0.15	0.5	0.500704	0.500704	0.250301	0.250705	0.250705
0.1	0.5	0.500313	0.500313	0.250134	0.250313	0.250313
0.05	0.5	0.500078	0.500078	0.250033	0.250078	0.250078
0.005	0.5	0.500001	0.500001	0.25	0.250001	0.250001
0.0005	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25

**Table 3:** Test de convergence d'après le voisinage irrégulier  $N_{LirregulierAngles}(P)$

## 4.2. Évaluation de la précision

### 4.2.1. Estimation qualitative

Des exemples d'estimation qualitative de  $k_H$  et  $k_G$  pour les modèles *sphere* et *icosphere* sont donnés sur les Fig. 8 et Fig. 9. La charte de couleurs utilisée est une échelle en niveaux de gris et la mise en évidence des échecs de calcul

dû au manque de voisinage approprié (par exemple 6 voisins pour le *SQFA*) est donnée en rouge.

### 4.2.2. Estimation quantitative

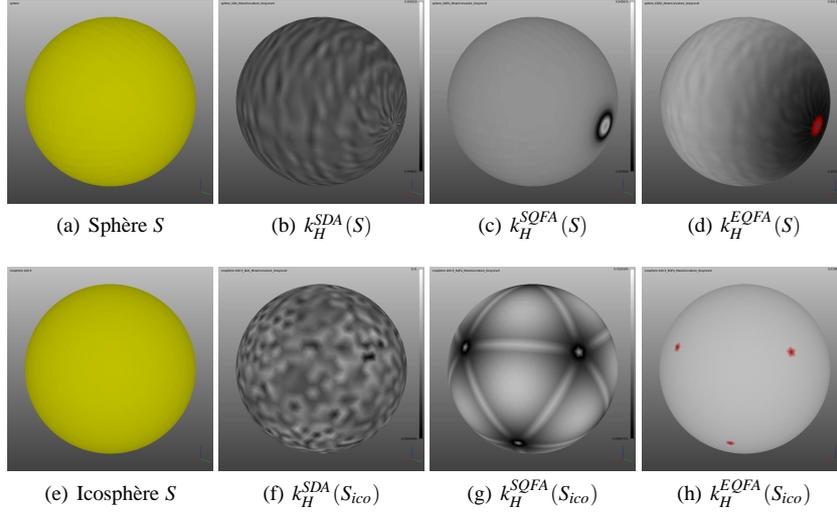
L'estimation de la courbure moyenne  $k_H$  selon le moyennage discret *SDA* \*\*\* est donnée dans Tab. 5, et selon l'approximation quadratique *SQFA* (6) \*\*\* et *EQFA* (16) \*\*\* dans Tab. 8.

L'estimation de la courbure de Gauss  $k_G$  selon le moyennage discret *SDA* est donnée dans Tab. 6, et selon l'approximation quadratique *SQFA* (6) et *EQFA* (16) dans Tab. 9.

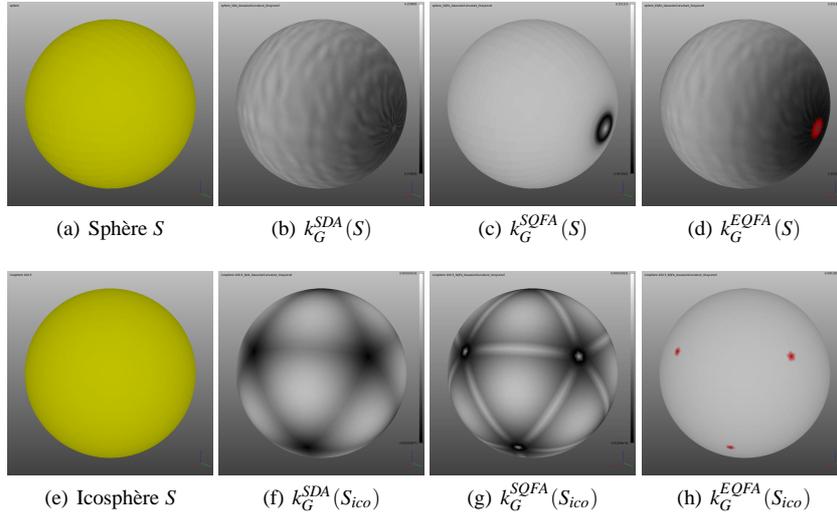
Modèles	AR			
	min	max	mean	$\sigma$
sphere	0.121444	0.528411	0.419728	0.0857635
icosphere	0.688617	0.866024	0.816532	0.0394559
cylindre	0.157675	0.587785	0.196776	0.123648
cone	0.211018	0.617172	0.368828	0.124579
torus	0.339247	0.505296	0.450967	0.0571855
fantôme	0.000107806	0.86377	0.442028	0.17072
bunny	0.00674803	0.864839	0.508201	0.0719481
sheep	0.045013	0.847384	0.420514	0.156866
cow	0.027528	0.853922	0.413189	0.148538
dragon	0.00227129	0.865302	0.432887	0.176544
venus-face	0.0129005	0.864696	0.520951	0.11168
talus	0.00522139	0.864996	0.492065	0.0953792
scan200K	0.00455352	0.864899	0.442269	0.178125

**Table 4:** Évaluation de la qualité des maillages d'après l'aspect ratio AR des triangles sous-jacents

\*\*\*. "Simple Discret Algorithmne"  
 \*\*\*. "Simple Quadratic Fitting Algorithm"  
 \*\*\*. Extended Quadratic Fitting Algorithm"



**Figure 8:** Évaluation de la courbure moyenne  $k_H$  : (a,e) Objet initial (b,f) Évaluation de  $k_H$  par moyennage discret SDA (c,g) Évaluation de  $k_H$  par approximation quadratique SQFA (d,h) Évaluation de  $k_H$  par approximation quadratique EQFA



**Figure 9:** Évaluation de la courbure de Gauss  $k_G$  : (a,e) Objet initial (b,f) Évaluation de  $k_G$  par moyennage discret SDA (c,g) Évaluation de  $k_G$  par approximation quadratique SQFA (d,h) Évaluation de  $k_G$  par approximation quadratique EQFA

Modèles	$k_H^{SDA}$			
	min	max	mean	$\sigma$
sphere	0.499822	0.500229	0.500001	3.46316e-05
icosphere	0.00999996	0.01	0.01	1.18749e-08
cone	4.37365e-19	0.1	0.0130829	0.0130145
torus	0.000337821	0.333657	0.211618	0.113427
fantôme	-38.8886	3.10134	0.0377687	0.654873
bunny	-1436.23	3512.19	24.6573	99.1864
cow	-1942.58	957.034	9.94202	63.8433
sheep	-3136.55	1982.74	12.8189	123.295
dragon	-122341	236045	10.758	1596.71
venus-face	-503.984	2683.88	1.53088	14.6073
talus	-44.8376	3.15905	0.0426164	0.616615
scan200K	-1556.72	581.586	0.0829026	8.81855

**Table 5:** Calcul de la courbure moyenne  $k_H$  par moyennage discret SDA

### 4.3. Qualité des maillages

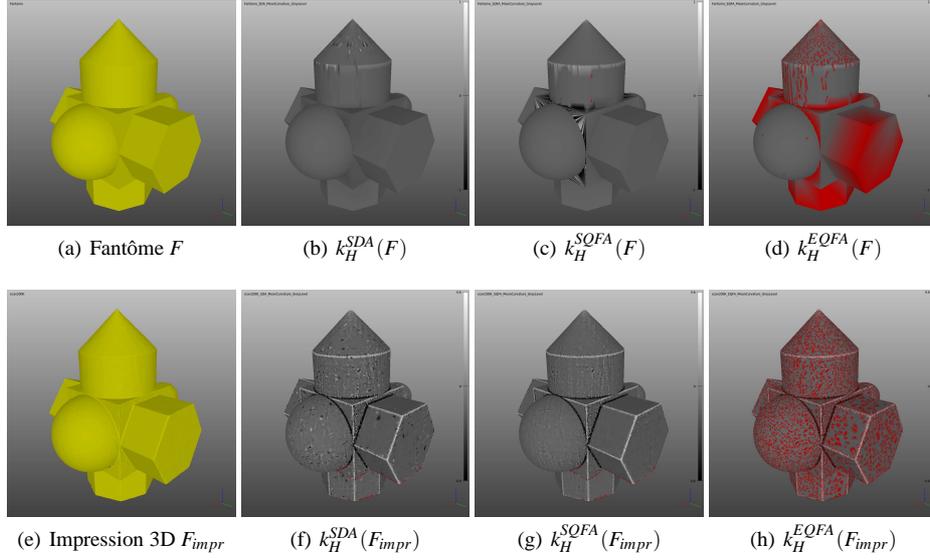
L'estimation de la qualité des maillages selon l'aspect ratio  $AR$  des triangles sous-jacents est donnée dans Tab. 7.

### 4.4. Sensibilité au bruit

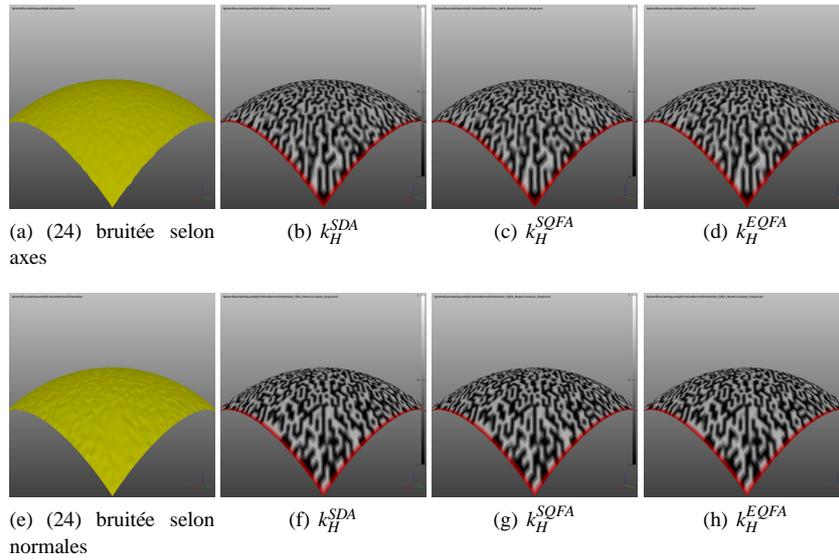
Une illustration de la robustesse du calcul de  $k_H$  est donnée sur les Fig. 10 et Fig. 11.

Sur la Fig. 10 on voit la différence des résultats de l'évaluation de  $k_H$  selon la nature des données, un maillage obtenu avec un modèleur géométrique Blender et un maillage obtenu par reconstruction dans Geomagic à partir des points acquis.

Sur la Fig. 11 on voit la différence des résultats de l'évaluation de  $k_H$  sur un maillage, échantillonnage régulier de



**Figure 10:** Évaluation de la courbure moyenne  $k_H$  : (a,e) Objet initial (b,f) Évaluation de  $k_H$  par moyennage discret SDA (c,g) Évaluation de  $k_H$  par approximation quadratique SQFA (d,h) Évaluation de  $k_H$  par approximation quadratique EQFA



**Figure 11:** Évaluation de la courbure moyenne  $k_H$  : (a,e) Objet initial (b,f) Évaluation de  $k_H$  par moyennage discret SDA (c,g) Évaluation de  $k_H$  par approximation quadratique SQFA (d,h) Évaluation de  $k_H$  par approximation quadratique EQFA

(24) le long d'un axe choisi aléatoirement et le long de la normale de la surface au point considéré.

Les tableaux Tab. 10 et Tab. 11 contiennent les résultats quantitatifs de la Fig. 11.

#### 4.5. Discussion

Nous avons testé la convergence des méthodes sur des maillages, approximations linéaires par morceaux de surfaces continues.

Les trois types de voisinages, régulier, irrégulier par déplacement de sommet et irrégulier par perturbation d'angles, sont 6-voisins et leur  $AR_{mean}$  est proche de celui du triangle

isométrique \*\*\* La taille des voisinages, le rayon de la boule 3D au point d'intérêt, varie en diminuant de 0.5 à 0.0005. Sur des exemples des primitives géométriques nos résultats démontrent que la convergence vers les valeurs théoriques n'existe que dans des cas particuliers :

Ainsi par exemple, en utilisant  $N_{Lregulier}(P)$  et la primitive sphère, le calcul de la courbure moyenne  $k_H$  converge vers la valeur exacte pour les trois méthodes considérées. Il en va de même pour la courbure de Gauss  $k_G$ . Cependant, le calcul de la courbure de Gauss  $k_G$ , pour un cylindre dont les va-

\*\*\*. L'aspect ratio d'un triangle isométrique est de 0.866025404.

Modèles	$K_G^{SDA}$			
	min	max	mean	$\sigma$
sphere	0.249932	0.250695	0.250375	0.000176229
icosphere	0.000100073	0.000100142	0.000100118	1.51859e-08
cylindre	-2.87421e-18	0.000257968	4.60657e-05	9.88e-05
cone	-7.92547e-11	0.0167693	0.000209008	0.00165335
torus	-0.250072	0.0835202	-0.0386223	0.113546
fantôme	-0.222574	0.157537	-0.00132204	0.00680658
bunny	-580460	1.83222e+06	503.612	28337.5
cow	-75405.6	40665	100.261	2316.91
sheep	-33872	107056	423.845	4844.8
dragon	-1.77977e+07	7.09671e+07	12728.8	548020
venus-face	-22380.7	112683	13.5001	740.016
talus	-2.23512	26.4455	0.00942386	0.400356
scan200K	-5128.68	37991.8	0.739907	146.649

**Table 6:** Calcul de la courbure de Gauss  $k_G$  par moyennage discret SDA

Modèles	AR			
	min	max	mean	$\sigma$
sphere	0.121444	0.528411	0.419728	0.0857635
icosphere	0.688617	0.866024	0.816532	0.0394559
cylindre	0.157675	0.587785	0.196776	0.123648
cone	0.211018	0.617172	0.368828	0.124579
torus	0.339247	0.505296	0.450967	0.0571855
fantôme	0.000107806	0.86377	0.442028	0.17072
bunny	0.00674803	0.864839	0.508201	0.0719481
sheep	0.045013	0.847384	0.420514	0.156866
cow	0.027528	0.853922	0.413189	0.148538
dragon	0.00227129	0.865302	0.432887	0.176544
venus-face	0.0129005	0.864696	0.520951	0.11168
talus	0.00522139	0.864996	0.492065	0.0953792
scan200K	0.00455352	0.864899	0.442269	0.178125

**Table 7:** Évaluation de la qualité des maillages d'après l'aspect ratio AR des triangles sous-jacents

leurs théoriques sont de  $k_H = 0.25$  et  $k_G = 0$ , et sur ce même voisinage régulier, ne converge pas. L'erreur de la méthode SDA est de l'ordre de  $10^{-9}$ , et celle de SQFA et EQFA est de l'ordre de  $10^{-17}$ .

En utilisant  $N_{LirregulierSommer}(P)$  et la primitive sphère, dont les valeurs théoriques sont  $k_H = 0.5$  et  $k_G = 0.25$ , les valeurs estimées par SQFA sont de  $k_H^{estimee} = 0.4964$  et  $k_G^{estimee} = 0.2463$ .

En utilisant  $N_{LirregulierAngles}(P)$  et la primitive sphère, le calcul de  $k_H$  et  $k_G$  converge pour les trois méthodes. Il est clairement apparu aussi que la vitesse de convergence de SDA pour le calcul de  $k_H$  est supérieure à celle de SQFA et EQFA. En revanche, sur la primitive cylindre la valeur estimée de la courbure moyenne par la méthode SDA est  $k_H^{estimee} = 0.2666$  et l'erreur sur le calcul de  $k_G$  est de l'ordre de  $10^{-11}$ . Ce résultat est similaire au résultat de [GS03].

Concernant la méthode de moyennage discret SDA, nos expérimentations ont démontré qu'il existe des cas où SDA ne converge pas vers les valeurs exactes sur des maillages réguliers. De même, pour la méthode d'approximation quadratique SQFA et ce sur des maillages de bonne qualité au sens de la forme géométrique des triangles les constituant. Les meilleurs résultats obtenus sont pour la méthode EQFA.

Les résultats quantitatifs des tableaux Tab. 10 et 11 démontrent que les trois méthodes sont très sensibles au bruit : on obtient pour un facteur de bruit synthétique de  $10^{-3}$  multiplié par la longueur de la diagonale de la boîte englobante

du maillage un écart dont la valeur moyenne est de l'ordre de  $10^{11}$  pour  $k_H$  et  $10^6$  pour  $k_G$ . Cela est confirmé par les résultats qualitatifs de la Fig. 11. Sur la Fig. 10(h), on observe que pour un bruit d'acquisition, toutes les valeurs estimées correspondent à ce bruit.

## 5. Conclusion

Nous avons défini un cadre expérimental pour évaluer les méthodes de calcul des courbures discrètes. Nous avons étudié deux méthodes représentatives du calcul de la courbure moyenne  $k_H$  et la courbure de Gauss  $k_G$  : par approximation quadratique et par moyennage discret. Nous avons testé la convergence de ces méthodes en fonction de type du voisinage, régulier ou irrégulier, au point de calcul. Nous avons estimé la précision du calcul de manière qualitative et quantitative sur des exemples de référence. Il nous est apparu que l'évaluation de formes saillantes définies par les courbures discrètes à partir des images 3D acquises nécessite un pré-traitement des données pour limiter l'impact du bruit lors de l'acquisition. Dans le cas contraire, l'évaluation locale de  $k_H$  et  $k_G$  est majorée par le bruit et ne permet pas l'extraction des caractéristiques de forme de la surface. Nous comptons poursuivre ce travail afin de définir des critères de similarité multi-échelle qui nous permettront d'appareiller des zones d'intérêts et de segmenter les maillages le long de leurs frontières.

Modèles	$k_H^{SQFA}$				$k_H^{EQFA}$			
	min	max	mean	$\sigma$	min	max	mean	$\sigma$
sphere	0.354594	0.545973	0.493476	0.0315401	0.500128	0.501313	0.500771	0.00034226
icosphere	0.00995792	0.0100165	0.00999632	1.3922e-05	0.01001	0.010017	0.0100142	1.78224e-06
cone	-0	0.2	0.0131941	0.0203141	-0	0.2	0.0122693	0.0212983
torus	0.000338397	0.333907	0.211832	0.113483	0.000338397	0.333907	0.211827	0.113473
fantôme	-4410.58	4608.48	-0.769935	75.3501	-2.30708	1.0946	0.052863	0.0435013
bunny	-2328.21	1657.79	22.7064	93.8877	-1043.04	1123.09	24.1402	91.5206
cow	-117.449	482.887	10.4195	25.5229	-100.792	214.491	9.56258	19.6684
sheep	-330.794	423.171	14.4436	39.4515	-157.185	271.144	14.8928	30.7529
dragon	-50608.1	4643.14	-3.13735	376.707	-4028.19	2022.45	2.82052	142.508
venus-face	-238.108	499.075	1.34319	10.3144	-185.814	388.467	1.48016	10.3959
talus	-2.31083	1.84472	0.050963	0.163104	-1.26911	1.45946	0.0510175	0.154577
scan200K	-303.258	79.0642	0.127287	1.63235	-34.2229	43.4006	0.122054	0.965466

Table 8: Évaluation de la courbure moyenne  $k_H$  par approximation quadratique : SQFA et EQFA

Modèles	$k_G^{SQFA}$				$k_G^{EQFA}$			
	min	max	mean	$\sigma$	min	max	mean	$\sigma$
sphere	0.0915921	0.251315	0.237483	0.0355724	0.250128	0.251313	0.250771	0.000342271
icosphere	9.91599e-05	0.000100331	9.99262e-05	2.78566e-07	0.0001002	0.00010034	0.000100284	3.56943e-08
cylindre	-1.23874e-18	6.89609e-06	1.23144e-06	2.64115e-06	-1.23874e-18	1.23874e-18	6.56629e-19	6.55244e-19
cone	-0.000476261	0.04	0.000397045	0.00394393	0	0.04	0.000531104	0.00438544
torus	-0.250499	0.0835826	-0.0386542	0.11369	-0.250499	0.0835826	-0.0386423	0.113673
fantôme	-3.66615e+06	0.917033	-425.004	30039.6	-0.407813	0.918631	-0.000837523	0.0105541
bunny	-9.30449e+07	3.22554e+06	-3485.61	511224	-817587	720349	786.962	17531.5
cow	-1.29101e+06	185590	-699.607	25218	-6585.12	21726.5	10.0111	1034.6
sheep	-395126	168175	-749.362	17144.6	-22526.6	11635.2	36.8331	1831.23
dragon	-4.56114e+10	4.44223e+07	-941752	2.03988e+08	-1.22652e+07	1.74044e+06	-10077.2	163636
venus-face	-4.17437e+06	122142	-451.392	27164.7	-38026.6	44466.2	9.13124	378.357
talus	-6.04978	2.85647	0.00655737	0.11232	-0.831259	1.47726	0.00593066	0.0563389
scan200K	-41458.2	10433.6	-2.77824	221.21	-15508.9	1320.75	-0.441633	66.7624

Table 9: Évaluation de la courbure de Gauss  $k_G$  par approximation quadratique : SQFA et EQFA

Amplitude du bruit	$k_H$					
	SDA		SQFA		EQFA	
	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$
0	7.09784e-10	1.00613e-09	2.79425e-05	2.5226e-05	5.35647e-05	6.72297e-06
0.0001	0.088116	0.0585708	0.0881294	0.0585741	0.0881383	0.0585773
0.0002	0.204693	0.146143	0.204738	0.146185	0.204763	0.1462
0.0003	0.350774	0.255138	0.350862	0.255197	0.350926	0.255245
0.0004	0.521982	0.392708	0.522225	0.393084	0.522397	0.393218
0.0005	0.711943	0.525199	0.712565	0.526057	0.712999	0.52637
0.0006	0.900807	0.657014	0.901566	0.658839	0.902556	0.659541
0.0007	1.14406	0.834064	1.14541	0.83789	1.14734	0.83926
0.0008	1.3905	1.04057	1.39386	1.0469	1.39745	1.04959
0.0009	1.64824	1.22931	1.65257	1.23925	1.65877	1.24384
0.001	1.90416	1.43919	1.91082	1.45435	1.92044	1.4609
0.0011	2.16915	1.63334	2.17464	1.65799	2.18988	1.66896
0.0012	2.4871	1.8573	2.49581	1.89066	2.51895	1.90811
0.0013	2.76099	2.0801	2.77409	2.11843	2.80628	2.14478
0.0014	3.08619	2.32941	3.10383	2.39163	3.14962	2.42847

Amplitude du bruit	$k_G$					
	SDA		SQFA		EQFA	
	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$
0	2.73413e-05	1.57515e-06	2.79485e-05	2.52274e-05	5.3564e-05	6.72596e-06
0.0001	0.0879293	0.058631	0.0878435	0.0587317	0.0878645	0.0587501
0.0002	0.210071	0.155883	0.207905	0.158394	0.207958	0.158442
0.0003	0.366064	0.293399	0.355159	0.305123	0.355289	0.305263
0.0004	0.58549	0.523824	0.549283	0.557801	0.549605	0.558195
0.0005	0.872929	0.845313	0.794308	0.890021	0.79513	0.891042
0.0006	1.2484	1.29276	1.11464	1.34365	1.11658	1.34598
0.0007	1.80571	1.94267	1.59912	2.00628	1.60337	2.01144
0.0008	2.53729	2.73349	2.25222	2.88604	2.26144	2.89677
0.0009	3.4485	3.56571	3.04528	3.7596	3.06233	3.77863
0.001	4.63563	4.96041	4.07935	5.23177	4.11073	5.26582
0.0011	6.00738	6.53452	5.28669	6.88545	5.34141	6.94501
0.0012	7.87149	8.59784	6.94252	8.98583	7.04086	9.10434
0.0013	9.64862	10.2147	8.45837	10.8179	8.6107	10.9986
0.0014	11.9052	12.9297	10.3281	13.7232	10.5693	14.0357

Table 10: Estimation de  $k_H$  et  $k_G$  sur un maillage d'une sphère bruité le long des normales

Amplitude du bruit	$k_H$					
	SDA		SQFA		EQFA	
	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$
0	7.09784e-10	1.00613e-09	2.79425e-05	2.5226e-05	5.35647e-05	6.72297e-06
0.0001	0.100438	0.0726286	0.100451	0.0726315	0.100462	0.0726378
0.0002	0.232241	0.170308	0.232257	0.170322	0.232302	0.170352
0.0003	0.378227	0.278001	0.378316	0.277987	0.378439	0.278084
0.0004	0.566942	0.424816	0.56721	0.425125	0.567542	0.425384
0.0005	0.749053	0.548616	0.74954	0.549259	0.750363	0.549852
0.0006	0.94768	0.704387	0.947934	0.705888	0.949588	0.707048
0.0007	1.19388	0.874027	1.19497	0.876921	1.19801	0.879062
0.0008	1.42695	1.0779	1.4283	1.08375	1.4336	1.08771
0.0009	1.69961	1.29333	1.70155	1.30379	1.71004	1.31014
0.001	1.95398	1.48441	1.95615	1.49873	1.96986	1.50816
0.0011	2.25447	1.70093	2.2563	1.72443	2.27709	1.74068
0.0012	2.55978	1.89496	2.56535	1.92432	2.59455	1.94673
0.0013	2.81305	2.12276	2.8204	2.15842	2.86216	2.19355
0.0014	3.15723	2.36546	3.16508	2.42499	3.22165	2.46926

Amplitude du bruit	$k_G$					
	SDA		SQFA		EQFA	
	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$	$\bar{x}$	$\sigma(x)$
0	2.73413e-05	1.57515e-06	2.79485e-05	2.52274e-05	5.3564e-05	6.72596e-06
0.0001	0.100682	0.0735889	0.100412	0.0738971	0.100438	0.0739211
0.0002	0.237724	0.18402	0.234754	0.187304	0.234838	0.187384
0.0003	0.399819	0.319998	0.386437	0.336808	0.386659	0.337045
0.0004	0.657722	0.619516	0.610079	0.652807	0.610674	0.653489
0.0005	0.935125	0.918957	0.851028	0.964978	0.852516	0.966797
0.0006	1.33733	1.40611	1.19946	1.45527	1.20264	1.45933
0.0007	1.95956	2.13448	1.72667	2.22196	1.73374	2.23061
0.0008	2.67412	2.86564	2.37542	3.01713	2.38863	3.03221
0.0009	3.75368	3.95425	3.30172	4.1618	3.32745	4.19354
0.001	4.94011	5.38034	4.35306	5.64548	4.39809	5.69561
0.0011	6.53655	7.15796	5.71093	7.52333	5.79165	7.62511
0.0012	8.17043	9.00247	7.20762	9.39867	7.33834	9.5604
0.0013	10.0271	10.9543	8.70816	11.4895	8.90786	11.7585
0.0014	12.4116	13.605	10.7149	14.3805	11.0126	14.7567

Table 11: Estimation de  $k_H$  et  $k_G$  sur un maillage d'une sphère bruité le long d'un axe choisi aléatoirement.

Références

- [AV96] ALBOUL L., VAN D. R. : Polyhedral metrics in surface reconstruction. In *Proceedings of the 6th IMA Conference on the Mathematics of Surfaces* (New York, NY, USA, 1996), Clarendon Press, pp. 171–200.
- [AW98] ANGELOPOULOU E., WOLFF L. B. : Sign of gaussian curvature from curve orientation in photometric space. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Vol. 20, Num. 10 (1998), 1056–1066.
- [BDM05] BAC A., DANIEL M., MALTRET J.-L. : 3d modeling and segmentation with discrete curvatures. *Journal of Medical Informatics and Technology*, Vol. 9 (2005), 13–24.
- [BGge] BERGER M., GOSTIAUX B. : *Géométrie Différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France, 2005, 2ème édition, 2ème tirage.
- [BJ86] BESL P., JAIN R. : Invariant surface characteristics for 3d object recognition in range images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 33, Num. 1 (1986), 33–80.
- [BJ88] BESL P., JAIN R. : Segmentation through variable-order surface fitting. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Vol. 10 (March 1988), 167–192.
- [Bor07] BORRELLI V. : Courbure discrète ponctuelle. In *Journées Nancéiennes de Géométrie* (2007).
- [CP05] CAZALS F., POUGET M. : Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 22 (2005), 121–146.
- [CPG09] CIPRIANO G., PHILLIPS N., GLEICHER M. : Multi-scale surface descriptors. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, Vol. 15, Num. 6 (2009), 1201–1208.
- [CS92] CHEN X., SCHMITT F. : Intrinsic surface properties from surface triangulation. In *European Conference on Computer Vision* (1992), pp. 739–743.
- [DMSB02] DESBRUN M., MEYER M., SCHRÖDER P., BARR A. : Discrete differential-geometry operators in nd. In *VisMath* (2002).
- [DW05] DONG C., WANG G. : Curvature estimation on triangular mesh. *Journal of Zhejiang University Science*, Vol. 6A, Num. 1 (2005), 128–136.
- [FJ89] FLYNN P., JAIN A. : On reliable curvature estimation. In *Computer Vision and pattern recognition* (1989), pp. 110–116.
- [F.O07] F. ORGERET : *Sur l'approximation des courbures des courbes planes et des surfaces lisses de  $E^3$* . PhD thesis, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, September 2007.
- [GG06] GATZKE T., GRIMM C. M. : Estimating curvature on triangular meshes. *International Journal of Shape Modeling*, Vol. 12, Num. 1 (2006), 1–28.
- [GI04] GOLDFEATHER J., INTERRANTE V. : A novel cubic-order algorithm for approximating principal direction vectors. *ACM Trans. Graph.*, Vol. 23 (January 2004), 45–63.
- [Go105] GOLDMAN R. : Curvature formulas for implicit curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 22, Num. 7 (2005), 632–658.
- [GS03] GARIMELLA R. V., SWARTZ B. K. : *Curvature Estimation for Unstructured Triangulations of Surfaces*. Tech. Rep. LA-UR-03-8240, Los Alamos National Laboratory, Nov 2003.
- [Ham92] HAMANN B. : Curvature approximation for triangulated surfaces. In *Geometric Modelling* (1992), pp. 139–153.
- [HHS95] HAGEN H., HAHMANN S., SCHREIBER T. : Visualization and computation of curvature behaviour of freeform curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, Vol. 27, Num. 7 (1995), 545–552.
- [HJBJ\*96] HOOVER A., JEAN-BAPTISTE G., JIANG X., FLYNN P., BUNKE H., GOLDFOG D., BOWYER K. W., EGGERT D. W., FITZGIBBON A. W., FISHER R. : An experimental comparison of range image segmentation algorithms. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Vol. 18, Num. 7 (1996), 673–689.
- [HS03] HAMEIRI E., SHIMSHONI I. : Estimating the principal curvatures and the darbox frame from real 3-d range data. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol. 33, Num. 4 (2003), 626–637.
- [Int97] INTERRANTE V. : Illustrating surface shape in volume data via principal direction-driven 3d line integral convolution. In *SIGGRAPH* (1997), pp. 109–116.
- [KKL02] KIM S.-J., KIM C.-H., LEVIN D. : Surface simplification using a discrete curvature norm. *Computers & Graphics*, Vol. 26, Num. 5 (2002), 657–663.
- [MD02] MALTRET J.-L., DANIEL M. : *Discrete curvatures and applications : a survey*. Rapport de recherche LSIS.RR.2002.002, Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes, 2002.
- [Mey04] MEYER M. : *Discrete differential operators for computer graphics*. PhD thesis, Pasadena, CA, USA, 2004. AAI3290476.
- [MNG04] MITRA N. J., NGUYEN A., GUIBAS L. : Estimating surface normals in noisy point cloud data. In *special issue of International Journal of Computational Geometry and Applications* (2004), no. 4–5, pp. 261–276.
- [Mor08] MORVAN J.-M. : *Generalized Curvatures*. Springer Series in Geometry and Computing, 2008.
- [MV97] MCIVOR A., VALKENBURG R. : A comparison of local surface geometry estimation methods. *Mach. Vis. Appl.*, Vol. 10, Num. 1 (1997), 17–26.
- [MW00] MEEK D., WALTON D. : On surface normal and gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 17, Num. 6 (2000), 521–543.
- [PB03] PÉBAY P. P., BAKER T. J. : Analysis of triangle quality measures. *Math. Comput.*, Vol. 72, Num. 244 (2003), 1817–1839.
- [Pet02] PETITJEAN S. : A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes. *ACM Computing Surveys*, Vol. 2 (2002), 1–61.

- [PQKZ03] PENG J., QING L., KUO C. J., ZHOU M. : Estimating gaussian curvatures from 3d meshes. In *SPIE Human Vision and Electronic Imaging VIII* (2003), pp. 270–280.
- [PSK\*02] PAGE D., SUN Y., KOSCHAN A., PAIK J., ABIDI M. : Normal vector voting : Crease detection and curvature estimation on large, noisy meshes. *Journal of Graphical Models*. Vol. 64 (2002), 199–229.
- [RB05] RAZDAN A., BAE M. : Curvature estimation scheme for triangle meshes using biquadratic bézier patches. *Computer-Aided Design*. Vol. 37, Num. 14 (2005), 1481–1491.
- [RK06] RUGIS J., KLETTE R. : A scale invariant surface curvature estimator. In *Advances in Image and Video Technology, First Pacific Rim Symposium, PSIVT* (2006), pp. 138–147.
- [Rus04] RUSINKIEWICZ S. : Estimating curvatures and their derivatives on triangle meshes. In *2nd Int Symp on 3D Data Processing, Visualization and Transmission (3DPVT 2004), 6-9 September 2004, Thessaloniki, Greece* (2004), IEEE Computer Society, pp. 1–8.
- [SMS\*03] SURAZHISKY T., MAGID E., SOLDEA O., ELBER G., RIVLIN E. : A comparison of gaussian and mean curvatures estimation methods on triangular meshes. In *ICRA* (2003), pp. 1021–1026.
- [Sor06] SORKINE O. : Differential representations for mesh processing. *Computer Graphics Forum*. Vol. 25, Num. 4 (2006), 789–807.
- [Spi70] SPIVAK M. : *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, inc., 1970.
- [Tau95] TAUBIN G. : Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation. In *ICCV* (1995), pp. 902–907.
- [TF95] TRUCCO E., FISHER R. : Experiments in curvature-based segmentation of range data. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* Vol. 17, Num. 2 (1995), 177–182.
- [WB01] WATANABE K., BELYAEV A. : Detection of salient curvature features on polygonal surfaces. *Comput. Graph. Forum*. Vol. 20, Num. 3 (2001).
- [WHH10] WEBER C., HAHMANN S., HAGEN H. : Sharp feature detection in point clouds. In *Shape Modeling International* (2010), pp. 175–186.
- [XX08] XU Z., XU G. : Discrete schemes for gaussian curvature and their convergence. *CoRR*. Vol. abs/0804.1046 (2008).
- [YQ07] YANG P., QIAN X. : Direct computing of surface curvatures for point-set surfaces. In *Symposium on Point Based Graphics* (2007), pp. 29–36.